NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63 / 45 45 55 33

EKSAMEN FY1002 BØLGEFYSIKK
Tirsdag 20. mai 2008 kl. 0900 - 1300
Norsk utgave

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling (alle språk).
- O. Øgrim og B. E. Lian: Størrelser og enheter i fysikk og teknikk, eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU. (HP30S eller lignende.)

Vedlegg A: Oppgavene (Side 2 - 5).
Vedlegg B: Formelsamling (Side 6 - 14).

Prøven består av 6 oppgaver. Det er angitt hvor mye de ulike oppgavene normalt vil telle under vurderingen. Vektorstørrelser angis med **fete** typer. Enhetsvektorer angis med hatt over symbolet.

Sensuren kommer når den er klar, senest 10. juni.

Vedlegg A: Oppgavene

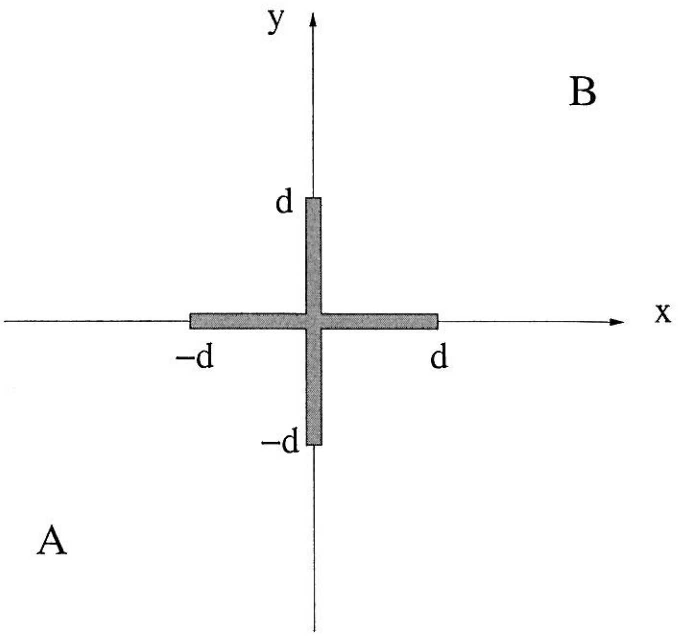
OPPGAVE 1 [1a og 1b teller 10% hver]

a) En gitarstreng med lengde $L = 70$ cm er festet i begge ender (dvs knutepunkter der). Grunntonen (dvs laveste resonansfrekvens) og overtonene genereres av stående transversale bølger på strengen. Den skal stemmes slik at grunntonen er en G med frekvens $f = 196$ Hz. Strengen har sirkulært tverrsnitt med radius $R = 0.25$ mm og er laget av stål, med massetetthet $\rho = 7800$ kg/m^3.

• Bestem bølgelengden λ og bølgehastigheten v til 1. overtone (dvs nest laveste resonansfrekvens). Med hvor stor strekk-kraft S må strengen strammes?

• Du og din venn Ole befinner dere på hver deres vogn som triller bort fra hverandre, med hastighet (relativt til bakken) henholdvis 10 m/s (du) og 25 m/s (Ole). Ole sitter og klimprer på G-strengen på gitaren sin. Hvilken frekvens vil grunntonen ha i dine ører? (Lyden fra gitaren forplanter seg i luft med hastighet 340 m/s.)

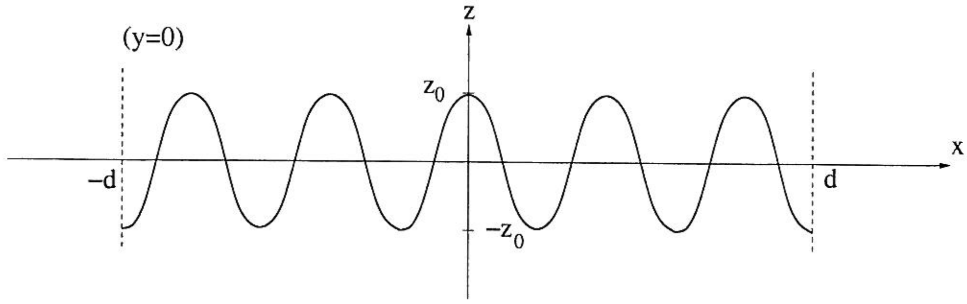
b) En tynn membran (f.eks. papir) er plassert i xy-planet. Et laseroptisk instrument kan måle transversalt utsving på membranen, for $-d < x < d$ når $y = 0$ og for $-d < y < d$ når $x = 0$:

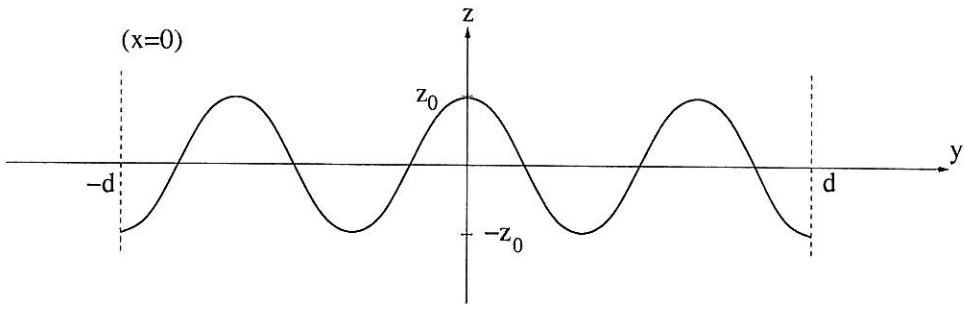


Membranen har stor utstrekning, både i x- og y-retning, i forhold til d. En plan harmonisk transversal bølge (z = utsvinget, $\boldsymbol{r} = x\,\hat{x} + y\,\hat{y}$),

$$z(\boldsymbol{r}, t) = z_0 \cos(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)\,,$$

forplanter seg i membranen, med retning fra område A mot område B (dvs mot høyre og oppover i figuren). Ved tidspunktet $t = 0$ viser instrumentet følgende utsving:





- Anta at $d = 40$ cm. Bestem bølgens bølgelengde λ.
- Bestem bølgens forplantningsretning. Angi denne ved vinkelen θ mellom forplantningsretningen og x-aksen.
- Med et annet instrument er bølgens frekvens målt til $\nu = 108$ Hz. Hva blir bølgens hastighet $\boldsymbol{v} = v_x\,\hat{x} + v_y\,\hat{y}$? (Bestem både v, v_x og v_y.)

OPPGAVE 2 [teller 15%]

Et toatomig molekyl, som f.eks. HCl, kan (klassisk) betraktes som to masser, M og m, forbundet med ei (masseløs) fjær med fjærkonstant k.

- Vis, med utgangspunkt i Newtons 2. lov, at molekylets atomer kan oscillere omkring sine likevektsposisjoner med vinkelfrekvensen

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{\mu}}$$

der $\mu = mM/(m + M)$ er molekylets såkalte reduserte masse.
Tips: Anta at molekylets massesenter ligger i ro og at atomenes utsving relativt til likevektsposisjonene X_0 og x_0 kan skrives på formen

$$\Xi(t) = X(t) - X_0 = A\cos\omega t$$

og

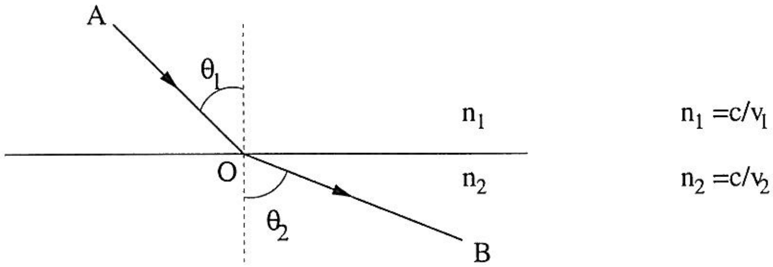
$$\xi(t) = x(t) - x_0 = B\cos\omega t$$

for henholdsvis M og m.

- Hva blir amplitudeforholdet $|A/B|$? (Det er trolig mest naturlig å bestemme $|A/B|$ *før* du bestemmer vinkelfrekvensen ω.)

OPPGAVE 3 [teller 10%]

Fermats prinsipp sier at en lysstråle velger den veien mellom to punkter A og B som tar kortest tid. Bruk dette prinsippet til å utlede Snells brytningslov, $n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$. Ta utgangspunkt i figuren nedenfor, der vi betrakter lysstråler som går fra posisjon A til posisjon B via en posisjon O i grenseflaten mellom de to mediene.



OPPGAVE 4 [teller 20%]

- Vis at en elektromagnetisk bølge i vakuum, med

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{E}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

og

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{B}_0 \sin(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{r} - \omega t)$$

forplanter seg i retningen gitt ved $\boldsymbol{k}$.

- Bruk Maxwells ligninger til å vise at en slik elektromagnetisk bølge er transversal, dvs at $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{k} \perp \boldsymbol{B}$.
- Vis oså at $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$.

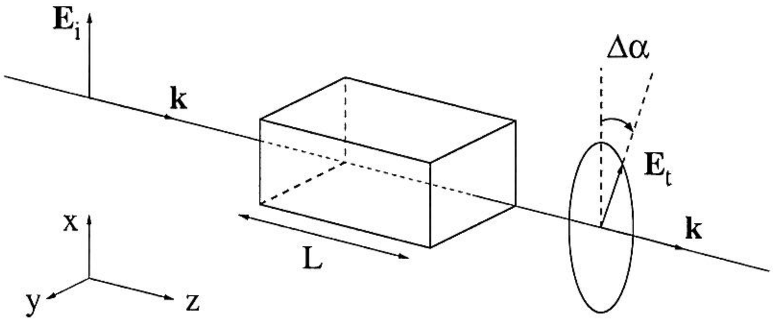
OPPGAVE 5 [teller 25%]

To lineærpolariserte elektromagnetiske bølger kan superponeres og danne sirkulærpolariserte bølger:

$$\boldsymbol{E}_{\pm}(z, t) = E_0 \hat{x} \sin(kz - \omega t) \pm E_0 \hat{y} \cos(kz - \omega t)$$

- Hva er forplantningsretningen til bølgene $\boldsymbol{E}_+$ og $\boldsymbol{E}_-$?
- Vis at en lineærpolarisert bølge polarisert i (f.eks.) x-retning kan betraktes som en superposisjon av en "venstredreiende" ($\boldsymbol{E}_+$) og en "høyredreiende" ($\boldsymbol{E}_-$) sirkulærpolarisert bølge.

En bestemt type molekyler er såkalt optisk aktive. I en gass bestående av slike molekyler er brytningsindeksene n_+ og n_- for henholdsvis venstre- og høyredreiende sirkulærpolariserte elektromagnetiske bølger forskjellige.



- En beholder med lengde L er fylt med en gass av optisk aktive molekyler, med $\Delta n = n_+ - n_- > 0$. En venstre- og en høyredreiende sirkulærpolarisert elektromagnetisk bølge bruker henholdsvis tiden t_+ og t_- på å propagere gjennom beholderen. Bestem forskjellen i tidsbruk for de to bølgene, $\Delta t = t_+ - t_-$.
- En lineærpolarisert elektromagnetisk bølge $\boldsymbol{E}_i$ er polarisert i x-retning og sendes inn mot beholderen som ble beskrevet i forrige kulepunkt (bølgetallsvektor $\boldsymbol{k} = 2\pi\hat{z}/\lambda$). Vis at den transmitterte bølgen $\boldsymbol{E}_t$ er lineærpolarisert, men at polarisasjonsretningen ikke lenger er langs x-aksen. Finn et uttrykk for vinkelen $\Delta\alpha$ mellom polarisasjonsretningen for innkommende bølge og transmittert bølge. Bestem tallverdi (i radianer) for $\Delta\alpha$ når $L = 0.50$ m, $\lambda = 628$ nm og $\Delta n = 4.0 \cdot 10^{-9}$.

Oppgitt:

$$\begin{aligned} \sin(a-b) + \sin(a+b) &= 2\sin a \cos b \\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2\sin a \sin b \end{aligned}$$

OPPGAVE 6 [teller 10%]

- Bruk lorentztransformasjonene til å utlede Einsteins formel for addisjon av hastigheter,

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

Her er v_{ij} hastigheten til inertialsystem i målt i inertialsystem j ($i, j = A, B, C$), og vi antar at samtlige relativhastigheter v_{ij} er langs en og samme akse.
- Anta at $v_{AB} = c/2$ og $v_{BC} = c/3$, begge langs positiv x-akse. Hva blir da den prosentvise feilen i v_{AC} dersom vi regner ikke-relativistisk og setter $v_{AC} = v_{AB} + v_{BC}$?

Vedlegg B: Formelsamling

Fete symboler angir vektorer. Symboler med hatt over angir enhetsvektorer. Formlenes gyldighet og symbolenes betydning antas å være kjent.

- Harmonisk plan bølge:
$$\xi(x,t) = \xi_0 \sin(kx - \omega t + \phi)$$
$$\xi(\boldsymbol{r},t) = \xi_0 \sin(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - \omega t + \phi)$$

- Bølgeligning:
$$\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(x,t)}{\partial t^2}$$
$$\nabla^2 \xi(\boldsymbol{r},t) \left(\equiv \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial z^2} \right) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \xi(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}$$

- Fasehastighet:
$$v = \frac{\omega}{k}$$

- Gruppehastighet:
$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

- Generelt for ikkedispersive udempede bølger:
$$v = \sqrt{\frac{\text{elastisk modul}}{\text{massetetthet}}}$$

- Generelt for lineær respons i elastiske medier:
$$\text{mekanisk spenning} = \text{elastisk modul} \times \text{relativ tøyning}$$

- For transversale bølger på streng:
$$v = \sqrt{\frac{S}{\mu}}$$

- For longitudinale bølger i fluider:
$$v = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$$

- For longitudinale bølger i faste stoffer:
$$v = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

- Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over bølgelengde λ:

$$\overline{A} = \frac{\int_0^\lambda A(x,t)\,dx}{\int_0^\lambda dx} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda A(x,t)\,dx$$

Middelverdi av harmonisk varierende størrelse $A(x,t)$, midlet over periode T:

$$\langle A \rangle = \frac{\int_0^T A(x,t)\,dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T}\int_0^T A(x,t)\,dt$$

- Midlere energi pr lengdeenhet for harmonisk bølge på streng:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere energi pr volumenhet for harmonisk plan bølge:

$$\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere effekt transportert med harmonisk bølge på streng:

$$\overline{P} = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\mu\omega^2\xi_0^2$$

- Intensitet i harmonisk plan bølge:

$$I = v\overline{\varepsilon} = \frac{1}{2}v\rho\omega^2\xi_0^2$$

- Midlere impulstetthet for harmonisk bølge:

$$\overline{\pi} = \frac{\overline{\varepsilon}}{v}$$

- Ideell gass:

$$pV = Nk_BT$$

- Varmekapasitet ved konstant trykk (Q = varme):

$$C_p = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_p$$

- Varmekapasitet ved konstant volum (Q = varme):

$$C_V = \left(\frac{dQ}{dT}\right)_V$$

- Adiabatiske forhold (dvs ingen varmeutveksling):

$$pV^\gamma = \text{konstant}$$

- Adiabatkonstanten:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V}$$

Gass med 1-atomige molekyler: $\gamma = 5/3$. Gass med 2-atomige molekyler: $\gamma = 7/5$.

- Bulkmodul for ideell gass ved adiabatiske forhold:

$$B = \gamma p$$

- Lydhastighet i gass (m = molekylmassen):

$$v = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}} = \sqrt{\frac{\gamma k_B T}{m}}$$

- Lydtrykk:

$$\Delta p = -B\frac{\partial \xi}{\partial x}$$

- Lydnivå:

$$\beta(\text{dB}) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

med $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2

- Dopplereffekt:

$$\nu_\text{O} = \frac{1 - v_\text{O}/v}{1 - v_\text{S}/v}\,\nu_\text{S}$$

- For sjokkbølger:

$$\sin\alpha = \frac{v}{v_\text{S}}$$

- Transversal bølge på streng med massetetthet μ_1 for $x < 0$ og μ_2 for $x > 0$, innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
$$y_{r0} = \frac{\sqrt{\mu_2} - \sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
$$y_{t0} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_2} + \sqrt{\mu_1}} y_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Plan lydbølge normalt inn mot grenseflate i $x = 0$ mellom to medier med elastiske moduler og massetettheter henholdsvis E_1, ρ_1 (for $x < 0$) og E_2, ρ_2 (for $x > 0$), innkommende bølge propagerer i positiv x-retning:

  Amplitude for reflektert bølge:
$$\xi_{r0} = \frac{\sqrt{\rho_2 E_2} - \sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$
  Amplitude for transmittert bølge:
$$\xi_{t0} = \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{\sqrt{\rho_2 E_2} + \sqrt{\rho_1 E_1}} \xi_{i0}$$
  Refleksjonskoeffisient:
$$R = \frac{\overline{P}_r}{\overline{P}_i}$$
  Transmisjonskoeffisient:
$$T = \frac{\overline{P}_t}{\overline{P}_i}$$

- Maxwells ligninger på integralform:

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A} = q/\varepsilon_0$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A} = 0$$

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{l} = -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{A}$$

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{l} = \mu_0 I + \mu_0\varepsilon_0\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{A}$$

- Maxwells ligninger på differensialform:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\varepsilon_0$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$$

- Lorentzkraften:

$$\boldsymbol{F} = q\left(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}\right)$$

- Bølgeligning for $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ i vakuum:

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}$$

$$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$$

- Energitetthet i elektromagnetisk felt:

$$u = u_E + u_B = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2$$

- Intensitet i elektromagnetisk bølge:

$$I = c\varepsilon_0\overline{E^2} = c\varepsilon_0\langle E^2\rangle$$

- Poyntings vektor:

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$$

- Impuls i elektromagnetisk bølge:

$$\boldsymbol{\pi} = \mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{S}$$

- Elektrisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$$

- Magnetisk dipolmoment:

$$\boldsymbol{m} = I\boldsymbol{A}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende elektrisk dipol $p_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{p_0^2 \omega^4}{12\pi\varepsilon_0 c^3}$$

- Midlere utstrålt effekt fra oscillerende magnetisk dipol $m_0 \cos(\omega t)$:

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

- Malus' lov:

$$I(\theta) = I_0 \cos^2\theta$$

- Lineære medier:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P} &= \varepsilon_0 \chi_e \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{D} &= \varepsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\boldsymbol{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r \boldsymbol{E} = \varepsilon \boldsymbol{E} \\
\boldsymbol{M} &= \chi_m \boldsymbol{H} \\
\boldsymbol{B} &= \mu_0 \boldsymbol{H} + \boldsymbol{M} = \mu_0(1+\chi_m)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \\
\oint \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} &= q_{\text{fri}} \\
\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} &= 0 \\
\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{l} &= -\frac{d}{dt}\int \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{l} &= I_{\text{fri}} + \frac{d}{dt}\int \boldsymbol{D}\cdot d\boldsymbol{A} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{D} &= \rho_{\text{fri}} \\
\nabla\cdot\boldsymbol{B} &= 0 \\
\nabla\times\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
\nabla\times\boldsymbol{H} &= \boldsymbol{j}_{\text{fri}} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \\
u &= \frac{1}{2}\varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2 \\
\boldsymbol{S} &= \frac{1}{\mu}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}
\end{aligned}$$

- For elektromagnetiske bølger i medier ($q_{\mathrm{fri}} = I_{\mathrm{fri}} = 0$):

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \boldsymbol{E} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \\
\nabla^2 \boldsymbol{B} &= \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2} \\
v &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r \mu_r}} = \frac{c}{n}
\end{aligned}$$

- Grenseflatebetingelser ($q_{\mathrm{fri}} = I_{\mathrm{fri}} = 0$ i grenseflaten):

$$\begin{aligned}
\Delta D_{\perp} &= 0 \\
\Delta E_{\parallel} &= 0 \\
\Delta B_{\perp} &= 0 \\
\Delta H_{\parallel} &= 0
\end{aligned}$$

- Refleksjon og brytning:

$$\theta_r = \theta_i$$

$$n_1 \sin\theta_i = n_2 \sin\theta_t$$

- Youngs eksperiment med to smale spalter:

$$I(\theta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)$$

- Diffraksjonsgitter med N smale spalter:

$$I(\theta) = I_0 \, \frac{\sin^2\left(\frac{N\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi d}{\lambda}\sin\theta\right)}$$

- Diffraksjon fra en spalte:

$$I(\theta) = I(0)\, \frac{\sin^2\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)}{\left(\frac{\pi a}{\lambda}\sin\theta\right)^2}$$

- Lorentzfaktor:

$$\gamma = \left(1 - v^2/c^2\right)^{-1/2}$$

- Lorentztransformasjonene ($\overline{S}$ har hastighet $\boldsymbol{v} = v\hat{x}$ i forhold til S):

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \gamma\,(x - vt) \\ \overline{y} &= y \\ \overline{z} &= z \\ \overline{t} &= \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \gamma\,(\overline{x} + v\overline{t}) \\ y &= \overline{y} \\ z &= \overline{z} \\ t &= \gamma\left(\overline{t} + \frac{v}{c^2}\overline{x}\right) \end{aligned}$$

- Tidsdilatasjon:

$$\Delta t = \gamma \Delta \overline{t}$$

- Lengdekontraksjon:

$$\Delta \overline{x} = \gamma \Delta x$$

- Hastighet i S ($\boldsymbol{u} = u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}$):

$$u_x = dx/dt$$

$$u_y = dy/dt$$

$$u_z = dz/dt$$

  Hastighet i $\overline{S}$ ($\overline{\boldsymbol{u}} = \overline{u}_x\hat{x} + \overline{u}_y\hat{y} + \overline{u}_z\hat{z}$):

$$\overline{u}_x = d\overline{x}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_y = d\overline{y}/d\overline{t}$$

$$\overline{u}_z = d\overline{z}/d\overline{t}$$

- Addisjon av hastigheter (alle hastigheter i samme retning):

$$v_{AC} = \frac{v_{AB} + v_{BC}}{1 + v_{AB}v_{BC}/c^2}$$

- Dopplereffekt for elektromagnetiske bølger:

$$\overline{\nu} = \nu \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2}$$

- Relativistisk impuls:

$$\boldsymbol{p} = \gamma m \boldsymbol{v}$$

- Newtons 2. lov:

$$\boldsymbol{F} = \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

- Energi:

$$\begin{aligned} E &= \gamma mc^2 \\ E_0 &= mc^2 \\ E_k &= E - E_0 \\ E^2 &= (pc)^2 + \left(mc^2\right)^2 \end{aligned}$$

- Elastisk prosess: E, $\boldsymbol{p}$, E_k og m bevart.
- Uelastisk prosess: E og $\boldsymbol{p}$ bevart.