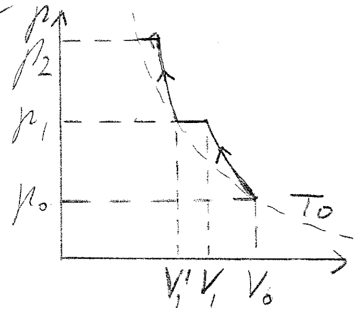
Eksamen i fag FY1005
Termisk fysikk, den 30/11 -06

Forslag til løsning.

Oppgave 1.

a)



Ved reversibel adiabatisk prosess gjelder $pV^\gamma = p_0 V_0^\gamma$ (for ideell gass). La V_1 være sluttvolumet ved den adiabatiske prosessen i trinn 1 og la V_1' være sluttvolumet ved avkjølingen i trinn 2.

Arbeidet i 1. trinn blir dermed (tilført arbeid)

$$W_1 = \int_{V_1}^{V_0} p\,dV = p_0 \int_{V_1}^{V_0} \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma dV = \frac{p_0 V_0}{\gamma - 1}\Big|_{V_1}^{V_0}\left(-\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}\right) =$$

$$\frac{p_0 V_0}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right] = \underline{\frac{p_0 V_0}{\gamma-1}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^\alpha - 1\right]}$$

der $\alpha = \frac{\gamma-1}{\gamma}$. Fra adiabatlikningen er her benyttet ~~at~~ $V_0/V_1 = (p_1/p_0)^{1/\gamma}$

Arbeidet i 2. trinn blir så

$$W_2 = \int_{V_1'}^{V_1} p\,dV = p_1(V_1 - V_1')$$

For ideell gass ved konstant $T = T_0$ gjelder

$$p_1 V_1' = p_0 V_0$$

Dette og bruk av adiabatlikningen for V_1 gir

$$W_2 = p_1 V_0 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{1/\gamma} - p_0 V_0 = p_0 V_0\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^\alpha - 1\right]$$

slik at samlet arbeid i de 2 trinnene blir

$$W_{12} = W_1 + W_2 = \underline{\frac{p_0 V_0}{\alpha}\left[\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^\alpha - 1\right]}$$

For 3. og 4. trinn finner en tilsvarende ved å erstatte p_0 med p_1 og p_1 med p_2

$$W_{34} = W_3 + W_4 = \underline{\frac{p_0 V_0}{\alpha}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha - 1\right]}$$

når en tar hensyn til at $p_0 V_0 = p_1 V_1'$ (isoterm).
Samlet arbeid blir

$$W = W_{12} + W_{34} = \underline{\underline{\frac{p_0 V_0}{\alpha}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha + \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^\alpha - 2\right]}}$$

med $\alpha = \frac{\gamma}{\gamma-1}$.

Størrelsen på p_1 som gir arbeidet minst mulig finnes ved å derivere m.h.p. p_1

$$\frac{\partial W}{\partial p_1} = p_0 V_0 \frac{1}{p_1}\left[\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha - \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^\alpha\right] = 0$$

eller

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^\alpha = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^\alpha$$

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{p_1}{p_0}$$

$$p_1^2 = p_0 p_2$$

$$\underline{\underline{p_1 = \sqrt{p_0 p_2}}}$$

Oppgave 2.

a) I termisk likevekt er trykk, temperatur og kjemiske potensial konstante over systemet.

Ved likevekt mellom væskefase og dampfase må kjemisk potensial eller Gibbs fri energi være den samme i begge fasene. Når temperaturen endres må en da ha

$$dG_v = dG_g$$

$$-S_v\,dT + V_v\,dp = -S_g\,dT + V_g\,dp$$

$$(S_g - S_v)\,dT = (V_g - V_v)\,dp$$

$$\frac{dp}{dT} = \frac{S_g - S_v}{V_g - V_v} = \frac{L}{T(V_g - V_v)}$$

der $L = T(S_g - S_v)$ er fordampingsvarmen.

[L er varme tilført ved konstant temperatur,

$L = \int dQ = \int T\,dS = T\int dS = T(S_g - S_v)$.]

b) Med $V_v << V_g$ og antagelse om ideell gass finner en

$$V_g - V_v = V_g = \frac{RT}{p}$$

slik at

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2}\,p$$

$$L = RT^2 \frac{1}{p}\frac{dp}{dT} = RT^2 \frac{d}{dT}(\ln p).$$

Det gitte uttrykket gir så

$$\ln p = \ln K - \alpha \ln T - \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT}$$

$$\frac{d}{dT}(\ln p) = -\frac{\alpha}{T} + \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT^2},$$

som innsatt gir

$$L = -\alpha R T + L_1 + \alpha R T_1 = L_1 + \alpha R(T_1 - T).$$

c) For damptrykket ved henholdsvis $T_0 = 0°C$ og $T_1 = 100°C$ har en

$$\ln p_0 = \ln K - \alpha \ln T_0 - \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT_0}$$

$$\ln p_1 = \ln K - \alpha \ln T_1 - \frac{L_1 + \alpha R T_1}{RT_1}.$$

Ved å ta differensen mellom likningene finner en

$$\ln \frac{p_1}{p_0} = -\alpha \ln \frac{T_1}{T_0} - \frac{L_1}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) - \alpha\left(1 - \frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \frac{L_1}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right) = \alpha\left(\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln \frac{T_1}{T_0}\right)$$

$$\alpha = \frac{\ln \frac{p_1}{p_0} - \frac{L_1}{R}\left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}\right)}{\frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln \frac{T_1}{T_0}} = \frac{\ln \frac{760}{4,58} - \frac{40,7 \cdot 10^3}{8,314}\left(\frac{1}{273} - \frac{1}{373}\right)}{\frac{373}{273} - 1 - \ln \frac{373}{273}}$$

$$= 5,6$$

Oppgave 3.

a) Sammenhengen mellom D, λ og $\langle v \rangle$ er

$$D = C\lambda\langle v\rangle$$

der C er en konstant. Tilsvarende har en

$$\lambda = \frac{c}{n} \qquad \text{og} \qquad \langle v\rangle = c\sqrt{T}$$

b) Antall mol H_2O (vann) er $\frac{m}{M}$ der $M = 18\,g/mol$ er vekten av vann pr. mol. Antall partikler blir derfor

$$N_t = N_A \frac{m}{M}.$$

Partikkelstrømtettheten ved diffusjon er

$$\vec{j} = -D\nabla n$$

der n er tettheten av partikler. Da tettheten av H_2O-partikler utenfor røret er lik 0 vil tetthetsgradienten bli

$$|\nabla n| = \frac{n_0}{L}$$

der n_0 er tettheten av vanndamp i bunnen av røret. Total partikkelstrøm blir så

$$J = jA = DA\frac{n_0}{L}.$$

Tettheten n_0 er bestemt av likningen for ideell gass

$$pV = NkT$$

$$n_0 = \frac{N}{V} = \frac{p}{kT}$$

slik at

$$J = D\frac{A}{L}\frac{p}{kT}$$

Tiden det tar før alt er tørket vort blir følgelig

$$t = \frac{N_t}{J} = N_A\frac{m}{M}\frac{LkT}{DAp} = \frac{mRTL}{MDAp}$$

$$\frac{0{,}15\cdot 10^{-3}\cdot 8{,}314\cdot 293\cdot 0{,}15}{18\cdot 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^{-5}\cdot 1{,}8\cdot 10^{-4}\cdot\frac{20}{760}\cdot 1{,}013\cdot 10^{5}} = 2{,}1\cdot 10^{5}\,s = 2{,}4 \text{ døgn.}$$