Eksamen i fag TFY4165/FY1005
Termisk fysikk, den 19/8 - 10.

①

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) Differensiering av enthalpien gir $dH = C_p\,dT$.
For volumet har en fra ideell gass likning $V = RT/p$. Innsatt i $TdS = dH - Vdp$ finner en så

$$dS = \frac{1}{T}C_p\,dT - \frac{R}{p}\,dp$$

Integrert gir dette

$$S = \underline{\underline{C_p \ln T - R\ln p + \text{konst.}}}$$

Dvs. $\underline{A = C_p \text{ og } B = R}$.

b) Som for porøs plugg strømmer energien $H_1 = U_1 + p_1V_1$ inn mens energien $H_2 = U_2 + p_2V_2$ strømmer ut av systemet. Her strømmer i tillegg energien Q inn i gassen mens den befinner seg i systemet. Energibalansen blir følgelig

$$H_1 + Q = H_2$$
$$C_pT_1 + Q = C_pT_2$$
$$Q = \underline{\underline{C_p(T_2 - T_1)}}$$

②

c) Entropien $S_1 = C_p\ln T_1 - R\ln p_1 + \text{konst}$ strømmer inn i systemet mens $S_2 = C_p\ln T_2 - R\ln p_2 + \text{konst}$ strømmer ut. I tillegg kommer entropien Q/T_1 ved varmeoverføring. Ved reversibel prosess er da

$$S_1 + \frac{Q}{T_1} = S_2$$

$$C_p\ln T_1 - R\ln p_1 + \text{konst} + \frac{Q}{T_1} = C_p\ln T_2 - R\ln p_2 + \text{konst}$$

Varmemengden Q kan nå elimineres ved å sette inn uttrykket fra punkt b. En kan så dividere på R og finner så

$$\alpha\left(\ln\frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2 - T_1}{T_1}\right) = \ln\frac{p_1}{p_2}$$

der $\alpha = C_p/R$. Ved å ta eksponensialfunksjonen av dette finner en så

$$\underline{\underline{p_1 = p_2\left[\frac{T_1}{T_2}\exp\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1}\right)\right]^{\alpha}}}$$

Numerisk finner en

$$p_1 = 1{,}00\text{ atm}\left[\frac{293}{258}\exp\left(\frac{258-293}{293}\right)\right]^{3{,}5}$$

$$= 1{,}00\text{ atm}\,(1{,}1356\cdot 0{,}8874)^{3{,}5} = \underline{\underline{1{,}028\text{ atm}}}$$

Oppgave 2.

a) Tilført varme i et tidsrom dt

$$C_p\, dT = P\, dt$$

Dette gir varmekapasiteten

$$C_p = P\frac{dt}{dT} = \frac{P}{\frac{dT}{dt}} = \underline{\underline{\frac{P}{\dot T}}}.$$

Ved derivering finner en så

$$\dot T(t) = T_0 \frac{\gamma}{2(1+\gamma t)^{1/2}}$$

Med $T = T_0(1+\gamma t)^{1/2}$ kan t enkelt elimineres og en finner

$$\dot T(t) = T_0 \frac{\gamma}{2}\frac{T_0}{T}$$

eller

$$C_p = \underline{\underline{\frac{2P}{\gamma T_0^2} T.}}$$

b) Med

$$dU = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV = K\, dT + \frac{a}{V^2} dV$$

finner en først

$$C_p = \frac{dQ}{dT} = \left(\frac{dU + p\,dV}{dT}\right)_p = K + \left(\frac{a}{V^2} + p\right)\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p.$$

Tilstandslikningen gir så ved differensiering

$$dp = \frac{R}{V-b} dT - \left(\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}\right) dV$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{\frac{R}{V-b}}{\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}}$$

Med $p + a/V^2 = RT/(V-b)$ finner en dermed

$$C_p = K + \frac{\frac{R^2 T}{(V-b)^2}}{\frac{RT}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^3}} = \underline{\underline{K + \frac{R}{1 - \frac{2a(V-b)^2}{RTV^3}}.}}$$

c) På kritisk punkt har en horisontal tangent og vendepunkt på isotermen slik at

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial V^2} = \frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$$

Med $V_c = 3b$ finner en fra den første likningen

$$T_c = T = \frac{2a}{V^3}\frac{(V-b)^2}{R} = \frac{2a}{(3b)^3}\frac{(2b)^2}{R} = \underline{\underline{\frac{8}{27}\frac{a}{Rb}.}}$$

[Innsetting i den andre likningen gir samme resultat.]

Oppgave 3.

a) Med de nye variable finner en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial \tau}\cdot 1$$

$$+ \frac{\partial T}{\partial z}\left(-\frac{x}{2\sqrt{2Dt}\,t}\right) = \underline{\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{z}{2\tau}\frac{\partial T}{\partial z}}.$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0 + \frac{\partial T}{\partial z}\frac{1}{\sqrt{2Dt}}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}}\frac{\partial T}{\partial z}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2Dt}}\right)^2\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \underline{\frac{1}{2D\tau}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}$$

Følgelig blir differensiallikningen

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} - \frac{z}{2\tau}\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{D}{2D\tau}\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

eller

$$\underline{\underline{2\tau\frac{\partial T}{\partial \tau} - z\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}.}}$$

Dvs. $\underline{\underline{a=2}}$.

b) $z=0$ tilsvarer $x=0$ for alle t.
$z=\infty$ Tilsvarer $t=0$ for alle x.

Grensebetingelsene blir derfor (iflg. figur)

$$T(0) = \underline{\underline{T_0 + T_1}}. \quad (= T(t,0))$$

$$T(\infty) = \underline{\underline{T_0}}. \quad (= T(0,x))$$

Ved derivering finner en

$$\frac{dT}{dz} = C_1 e^{-z^2/2}$$

$$\frac{d^2T}{dz^2} = -z\,C_1 e^{-z^2/2} = -z\frac{dT}{dz}$$

som betyr at differensiallikningen er oppfylt siden T er uavhengig av τ.

c) Fra løsningen og oppgitt integral finner en sammen med grensebetingelsene

$$T(0) = C_2 = \underline{\underline{T_0 + T_1}}.$$

$$T(\infty) = C_1\int_0^\infty e^{-u^2/2}du + C_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi}\,C_1 + C_2 = T_0$$

$$C_1 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}(T_0 - C_2) = \underline{\underline{-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,T_1.}}$$

Varmestrømmen inn i veggen blir $(x=0, z=0)$

$$j(t) = -K\frac{\partial T}{\partial x} = -K\frac{\partial T}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{K}{\sqrt{2Dt}}\frac{\partial T}{\partial z}$$

$$= \underline{-\frac{K}{\sqrt{2Dt}}C_1} = \frac{0{,}80\,\mathrm{W/(m\cdot K)}\cdot 12\,\mathrm{K}}{(2\cdot 0{,}0018\,\mathrm{m^2/h}\cdot 3\,\mathrm{h})^{1/2}} = \underline{\underline{92\,\mathrm{W/m^2}.}}$$