Eksamen i fag TFY4165/FY1005
Termisk fysikk, 4/6 - 2010.

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a) For å bestemme T_1 trenger en sammenhengen mellom trykk og temperatur langs en adiabat. For ideell gass har en pV^γ = konst. Ved å eliminere V via $pV = RT$ finner en

$$pV^\gamma = p\left(\frac{RT}{p}\right)^\gamma = p^{1-\gamma}T^\gamma R^\gamma = \text{konst}$$

$$T p^{-\sigma} = \text{konst}$$

der $\sigma = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{C_p - C_V}{C_p} = \frac{R}{C_p}$.

Av dette finner en så

$$T_1 p_0^{-\sigma} = T_0 p_1^{-\sigma}$$

$$T_1 = \underline{\underline{T_0\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^\sigma}} \qquad \left(\sigma = \frac{\gamma-1}{\gamma} = \frac{2}{7}\right)$$

og tilsvarende

$$T_2 p_1^{-\sigma} = T_0 p_0^{-\sigma}$$

$$T_2 = \underline{\underline{T_0\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^\sigma}}. \qquad (\text{dvs. } T_1T_2 = T_0^2)$$

b) Ved den adiabatiske ekspansjonen tilføres ikke varme mens oppvarmingen mellom temperaturene T_1 og T_0 skjer ved konstant trykk. Opptatt varme blir derfor

$$Q = \underline{\underline{C_p(T_0 - T_1)}}. \qquad \left(C_p = \frac{R}{\sigma} = \frac{\gamma}{\gamma-1}R\right)$$

Siden gassen er ideell er indre energi uavhengig av volumet slik at

$$\Delta U = \underline{\underline{0}}.$$

Energibevarelse etter 1. hovedsetning betyr at $Q = \Delta U + W_1$. Med denne prosessen i to trinn er $\Delta U = 0$. Følgelig

$$W_1 = Q = \underline{\underline{C_p(T_0 - T_1)}}.$$

c) Det utvendige trykket vil gjøre arbeidet

$$W_0 = p_0(V_1 - V_0) = p_0\left(\frac{RT_0}{p_1} - \frac{RT_0}{p_0}\right) = \underline{\underline{RT_0\left(\frac{p_0}{p_1} - 1\right)}}.$$

Nettoarbeid ved ekspansjonen

$$W_{in} = W_1 + W_0 = C_p(T_0 - T_1) + RT_0\left(\frac{p_0}{p_1} - 1\right) =$$

$$R\left[\frac{\gamma}{\gamma-1}(T_0 - T_1) + T_0\left(\frac{p_0}{p_1} - 1\right)\right] = 8{,}314\left[\frac{7}{2}(293-240) + 293\left(\frac{1}{2} - 1\right)\right] \text{J/mol} = \underline{\underline{324 \text{ J/mol}}}.$$

Endring av entropi: $\Delta S = C_p(\ln T_0 - \ln T_1) = \underline{\underline{C_p \ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right)}}$.

Endring av volum: $\Delta V = V_0 - V_1' = \frac{RT_0}{p_0} - \frac{RT_1}{p_0} = \underline{\underline{\frac{R}{p_0}(T_0 - T_1)}}$.

Endring av indre energi: $\Delta U = \underline{\underline{C_V(T_0 - T_1)}}$.

Maksimalt arbeid blir dermed

$$W_{max} = T_0\Delta S - \Delta U - p_0\Delta V = C_pT_0\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) - C_V(T_0 - T_1)$$

$$- R(T_0 - T_1) = C_p\left(T_0 \ln\frac{T_0}{T_1} - (T_0 - T_1)\right) = R\frac{\gamma}{\gamma-1}\left(T_0\ln\left(\frac{T_0}{T_1}\right) - (T_0 - T_1)\right)$$

$$= 8{,}314 \cdot \frac{7}{2}\left[293 \ln\frac{293}{240} - (293 - 240)\right] \text{J/mol} = \underline{\underline{159 \text{ J/mol}}}.$$

[$W_{in} + W_{max}$ er lik arbeidet langs isotermen $T = T_0$ minus W_0 dersom nøyaktig verdi $T_1 = T_0\,(p_0/p_1)^\sigma = 240{,}358$ K brukes.]

Oppgave 2.

a) ΔS er forskjellen i entropi mellom de 2 fasene i likevekt mens ΔV er forskjellen i volum.

I uttrykket for p er K en konstant. Med konstant fordampingsvarme L finner en ved derivering

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2} K \exp\left(-\frac{L}{RT}\right) = \frac{Lp}{RT^2} = \frac{L}{TV} \approx \underline{\underline{\frac{\Delta S}{\Delta V}}}$$

når likningen for ideell gass $RT = pV$ benyttes. Siden faseoverganger skjer ved konstant temperatur er tilført varme $L = \varphi = T\Delta S$. For damp ved lav tetthet kan volum av væske eller fast fase neglisjeres slik at gassvolum $V \approx \Delta V$.

b) Siden fordampingsvarmen for is og vann er forskjellige må temperaturer over og under frysepunktet betraktes separat. En får da følgende likninger

$$p_1 = K_i \exp\left(-\frac{L_i}{RT_1}\right)$$

$$p_0 = K_i \exp\left(-\frac{L_i}{RT_0}\right)$$

$$p_0 = K_v \exp\left(-\frac{L_v}{RT_0}\right)$$

$$p_2 = K_v \exp\left(-\frac{L_v}{RT_2}\right)$$

Her $L_v = 45{,}0$ kJ/mol fordampingsvarmen for vann mens $L_i = (45{,}0 + 6{,}0)$ kJ/mol $= 51{,}0$ kJ/mol er fordampings- eller sublimasjonsvarmen for is

Ved å ta forholdet mellom 1. og 2. likning og mellom 3. og 4. likning og så multiplisere sammen finner en

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1}{p_0}\frac{p_0}{p_2} = \exp\left[-\frac{L_i}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) + \frac{L_v}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{51\cdot 10^3}{8{,}314}\left(\frac{1}{263} - \frac{1}{273}\right) + \frac{45\cdot 10^3}{8{,}314}\left(\frac{1}{293} - \frac{1}{273}\right)\right] = \underline{\underline{0{,}11.}}$$

c) Ved differensiering finner en

$$dp = \frac{R}{V-b}dT + \left(-\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}\right)dV$$

Dette gir

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{V}\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} = \underline{\underline{\frac{1}{\frac{RTV}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}}}}.$$

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \underline{\underline{\frac{\frac{R}{V-b}}{\frac{RTV}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}}}}. \quad \left(= \frac{R}{V-b}K_T\right)$$

Oppgave 3.

a) Siden partiklene bare kommer fra den ene siden er $0 \le \theta \le 90°$. Integrering over vinklene gir dermed

$$\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \Big|_0^{\pi/2} \tfrac{1}{2}\sin^2\theta = \underline{\pi.}$$

Total partikkelstrømtetthet blir dermed

$$j_z = \int dj_z = \int v\cos\theta \, n \, F(v) \, d\vec{v} =$$

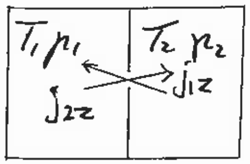
$$\int v\cos\theta \, n \, F(v) \, v^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dv = n\int v F(v) \pi v^2 dv$$

$$= \frac{1}{4} n \int v F(v) d\vec{v} = \underline{\underline{\frac{1}{4} n \langle v \rangle.}}$$

b) I termisk likevekt er midlere hastighet proporsjonal med $\sqrt{T}$, dvs.

$$\langle v \rangle = K \cdot \sqrt{T}$$

der K er konstant.



Ved stasjonær tilstand strømmer like mange partikler hver vei slik at

$$j_{1z} = j_{2z}$$

$$\frac{1}{4} n_1 \langle v \rangle_1 = \frac{1}{4} n_2 \langle v \rangle_2$$

$$n_1 \sqrt{T_1} = n_2 \sqrt{T_2}$$

Med ideell gass har en $p = \frac{N}{V} kT = nkT$ eller

$$n = \frac{p}{kT}.$$

Innsatt gir dette

$$\frac{p_1}{kT_1}\sqrt{T_1} = \frac{p_2}{kT_2}\sqrt{T_2}$$

$$\underline{\underline{p_2 = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.}}$$

c) Overflatearealet til satelitten er

$$A = 4\pi R^2 = 4\pi (0{,}50\,\text{m})^2 = \underline{3{,}14\,\text{m}^2}$$

Utstrålt effekt er derfor

$$P = A\sigma T^4 = 3{,}14\,\text{m}^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\text{W}/(\text{m}^2\text{K}^4) \cdot (283\,\text{K})^4$$

$$= 1140\,\text{W} = \underline{\underline{1{,}14\,\text{kW.}}}$$

Utstrålt effekt medfører at satelitten avgir varme

$$dQ = C\,dT = -P\,dt = -A\sigma T^4 dt$$

Dette gir differensialligningen

$$\underline{\underline{\frac{dT}{dt} = -\frac{A\sigma}{C} T^4.}}$$