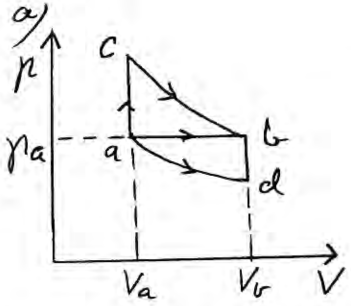
Eksamen i fag TFY4165/FY1005
Termisk fysikk, den 20/8 – 11.

Forslag til løsning.

Oppgave 1

a)



Den indre energien U er bestemt av tilstanden. Videre er energien bevart, dvs.

$$Q = \Delta U + W$$

Endringen eller forskjellen i indre energi mellom punktene b og a blir da

$$\Delta U_{ab} = U_b - U_a = Q_{acb} - W_{acb} = 12{,}0\,\text{kJ} - 4{,}5\,\text{kJ} = \underline{7{,}5\,\text{kJ}}.$$

Langs veien adb blir følgelig ~~mottatt~~ varmemengde

$$Q_{adb} = \Delta U_{ab} + W_{adb} = 7{,}5\,\text{kJ} + 2{,}0\,\text{kJ} = \underline{\underline{9{,}5\,\text{kJ}}}.$$

Netto utført arbeid

$$W = W_{acb} - W_{adb} = (4{,}5 - 2{,}0)\,\text{kJ} = \underline{2{,}5\,\text{kJ}}$$

Virkningsgraden:

$$\eta = \frac{W}{Q_{acb}} = \frac{2{,}5}{12{,}0} = \underline{0{,}21}.$$

b) Utført arbeid langs veien ab (p = konst)

$$W_{ab} = p_a(V_b - V_a) = 2{,}0\cdot 10^5\,\text{Pa}\,(35-20)\cdot 10^{-3}\,\text{m}^3 = \underline{3{,}0\,\text{kJ}}.$$

Mottatt varmemengde blir da

$$Q_{ab} = \Delta U_{ba} + W_{ab} = 7{,}5\,\text{kJ} + 3{,}0\,\text{kJ} = \underline{\underline{10{,}5\,\text{kJ}}}.$$

Arbeidet langs ac er lik null da volumet ikke endres. Mottatt varmengde er da lik endring i indre energi

$$Q_{ac} = \Delta U_{ac} = U_c - U_a = U_c - U_b - (U_a - U_b)$$

$$= -\Delta U_{cb} + \Delta U_{ab} = (-3{,}0 + 7{,}5)\,\text{kJ} = \underline{\underline{4{,}5\,\text{kJ}}}.$$

c)

Endring i indre energi:

$$\Delta U = C(T_0 - T_1)$$

Endring i entropi

$$\Delta S = C\int_{T_1}^{T_0} \frac{C\,dT}{T} = C\ln(T_0/T_1)$$

Da volumet er uendret, $\Delta V = 0$ blir det maksimale arbeidet

$$W_{max} = T_0\,\Delta S - \Delta U = \underline{\underline{C\left[T_0 \ln(T_0/T_1) - (T_0 - T_1)\right]}}.$$

Oppgave 2.

a) ΔS er forskjellen i entropi mellom de 2 fasene i likevekt mens ΔV er forskjellen i volum.

I uttrykket for p er K en konstant. Med konstant fordampingsvarme L finner en ved derivering

$$\frac{dp}{dT} = \frac{L}{RT^2} K \exp\left(-\frac{L}{RT}\right) = \frac{Lp}{RT^2} = \frac{L}{TV} \approx \underline{\underline{\frac{\Delta S}{\Delta V}}}.$$

når likningen for ideell gass $RT = pV$ benyttes. Siden faseovergangen skjer ved konstant temperatur er tilført varme $L = \varphi = T\Delta S$. For damp ved lav tetthet kan volum av væske eller fast fase neglisjeres slik at gassvolum $V \approx \Delta V$.

b) Siden fordampingsvarmen for is og vann er forskjellige må temperaturer over og under frysepunktet betraktes separat. En får da følgende likninger

$$p_1 = K_i \exp\left(-\frac{L_i}{RT_1}\right)$$

$$p_0 = K_i \exp\left(-\frac{L_i}{RT_0}\right)$$

$$p_0 = K_v \exp\left(-\frac{L_v}{RT_0}\right)$$

$$p_2 = K_v \exp\left(-\frac{L_v}{RT_2}\right)$$

Her $L_v = 45{,}0$ kJ/mol fordampingsvarmen for vann mens $L_i = (45{,}0 + 6{,}0)$ kJ/mol $= 51{,}0$ kJ/mol er fordampings- eller sublimasjonsvarmen for is

Ved å ta forholdet mellom 1. og 2. likning og mellom 3. og 4. likning og så multiplisere sammen finner en

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{p_1}{p_0}\frac{p_0}{p_2} = \exp\left[-\frac{L_i}{R}\left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_0}\right) + \frac{L_v}{R}\left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_0}\right)\right]$$

$$= \exp\left[-\frac{51 \cdot 10^3}{8{,}314}\left(\frac{1}{263} - \frac{1}{273}\right) + \frac{45 \cdot 10^3}{8{,}314}\left(\frac{1}{293} - \frac{1}{273}\right)\right] = \underline{\underline{0{,}11}}.$$

c) Ved differensiering finner en

$$dp = \frac{R}{V-b} dT + \left(-\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}\right) dV$$

Dette gir

$$K_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{1}{V}\frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} = \underline{\underline{\frac{1}{\frac{RTV}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}}}}.$$

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \underline{\underline{\frac{\frac{R}{V-b}}{\frac{RTV}{(V-b)^2} - \frac{2a}{V^2}}}}. \quad \left(= \frac{R}{V-b} K_T\right)$$

Oppgave 3

a) Ved derivering finner en

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -aDk^2 \sin(kx) e^{-Dk^2t} = -Dk^2 T$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = ak\cos kx\, e^{-Dk^2t}$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -ak^2 \sin kx\, e^{-Dk^2t} = -k^2 T$$

Følgelig er den gitte T løsning av $\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$.

Med den gitte T er grensebetingelsen ved $x=0$ automatisk oppfylt. Betingelsen $T = T_\infty$ ved $x = L$ medfører derfor (da den skal være oppfylt for alle t)

$$\sin(k_n L) = 0$$

eller

$$k_n L = \pi n$$

$$\underline{\underline{k_n = n\frac{\pi}{L}}} \quad \text{(der } n \text{ er heltall)}$$

b) Ved å sette inn finner en for koeffisientene a_n

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L T_1 \frac{x}{L} \sin(k_n x)\, dx$$

$$= \frac{2T_1}{L^2}\Big|_0^L \left(-x\cos(k_n x)\frac{1}{k_n} + \sin(k_n x)\frac{1}{k_n^2}\right)$$

$$= -\frac{2T_1}{L^2} L \cos(n\pi)\frac{L}{n\pi} = \underline{\underline{\frac{2(-1)^{n-1}}{\pi n}T_1}}.$$

c) For store tider blir løsningen

$$T - T_\infty = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(k_n x) e^{-Dk_n^2 t} \rightarrow a_1 \sin(k_1 x) e^{-Dk_1^2 t}.$$

Ved tiden $t = \tau$ og midt i plata, $x = \frac{L}{2}$ har en så

$$a_1 \sin\left(k_1 \frac{L}{2}\right) e^{-Dk_1^2\tau} = \frac{2T_1}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) e^{-D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\tau}$$

$$= \frac{2T_1}{\pi}\exp\left(-D\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\tau\right) = \underline{\frac{1}{20}T_1.}$$

Løst m.h.p. τ gir dette

$$\tau = \frac{-\ln\left(\frac{\pi}{2\cdot 20}\right)}{D}\left(\frac{L}{\pi}\right)^2 = \frac{-\ln(\pi/40)}{0{,}00037\,\text{m}^2/\text{h}}\left(\frac{0{,}20\,\text{m}}{\pi}\right)^2$$

$$= \underline{\underline{27{,}9\ \text{h}}} \approx \underline{\underline{28\ \text{timer.}}}$$