Eksamen i TFY4165/FY1005
Termisk fysikk, den 21/5-2012.

Forslag til løsning.

(1)

Oppgave 1

a) Arbeidet langs isotermen er gitt ved

$$W = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{RT_1}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right) dV$$

$$= \Big|_{V_1}^{V_2} \left(RT_1 \ln(V-b) + \frac{a}{V}\right) = RT_1 \ln \frac{V_2-b}{V_1-b} + \frac{a}{V_2} - \frac{a}{V_1}$$

$$= \underline{\underline{RT_1 \ln(7/4) - \frac{3}{40}\frac{a}{b}}}$$

Tilført varme er bestemt av energibevarelse

$$Q = \Delta U + W = U_2 - U_1 + W = -\frac{a}{V_2} + \frac{a}{V_1} + W$$

$$= \underline{RT_1 \ln(7/4).}$$

b) Entalpien er gitt ved

$$H = U + pV = C_V T - \frac{a}{V} + \left(\frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}\right)V$$

$$= \underline{\left(C_V + R\frac{V}{V-b}\right)T - \frac{2a}{V}.}$$

Med bevaring av entalpi finner en så med $V_s = \infty$, $V_0 = 6b$ og $C_V = \frac{5}{2}R$

$$H_s = H_0$$

(2)

$$(C_V + R)T_s = \left(C_V + R\frac{6}{5}\right)T_0 - \frac{2a}{6b}$$

$$\frac{7}{2}RT_s = \frac{37}{10}RT_0 - \frac{1}{3}\frac{a}{b}$$

$$\underline{\underline{T_s = \frac{37}{35}T_0 - \frac{2}{21}\frac{a}{Rb}.}}$$

c) Virkningsgraden til varmepumpa

$$\varepsilon = \frac{Q_2}{W} = \frac{12{,}0\text{ MJ}}{4{,}8\text{ MJ}} = \underline{2{,}5.}$$

Avlevert varme fra det kalde reservoaret

$$Q_1 = 12{,}0\text{ MJ} - 4{,}8\text{ MJ} = \underline{7{,}2\text{ MJ}.}$$

Total endring av entropi er gitt ved

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = \left(\frac{12{,}0}{293} - \frac{7{,}2}{263}\right)\frac{\text{MJ}}{\text{K}} = \underline{\underline{13{,}6\text{ kJ/K}.}}$$

Det teoretisk minste arbeidet er bestemt av at total entropiendring er lik 0. Da må en ha

$$\Delta S = \frac{Q_2}{T_2} - \frac{Q_1}{T_1} = 0$$

$$Q_1 = \frac{T_1}{T_2}Q_2 = \frac{263}{293} \cdot 12{,}0\text{ MJ} = \underline{10{,}77\text{ MJ}.}$$

Minste mulig arbeid tilført blir følgelig

$$W_{min} = Q_2 - Q_1 = (12{,}0 - 10{,}77)\text{ MJ} = \underline{\underline{1{,}23\text{ MJ}.}}$$

[Bruk av Carnot virkningsgrad gir det samme, $Q_1 = (T_1/T_2)Q_2$.]

Oppgave 2.

a) ΔS er endringen i entropi og ΔV er endringen av volum ved faseovergangen.

Ved faseovergang er $T=$ konst. slik at $L = T\Delta S$ eller

$$\Delta S = \frac{L}{T} = aT - b$$

Clapeyrons likning blir dermed

$$\frac{dp}{dT} = \frac{aT-b}{c}.$$

Ved integrering av denne likningen med gitt minimumsverdi p_0 finner en

$$\underline{\underline{p = \frac{a}{2c}\left(T - \frac{b}{a}\right)^2 + p_0.}}$$

b) Fra uttrykket for frysepunktnedsettelsen finner en først

$$x_s = -\Delta T \frac{L_s}{RT_0^2} = -0{,}14\,K \cdot \frac{333\,J/g \cdot 18\,g/mol}{8{,}314\,J/(mol\cdot K)\cdot(273K)^2}$$

$$= \underline{1{,}354 \cdot 10^{-3}.}$$

Antall mol vann

$$n_v = \frac{3{,}5\,kg}{18\,g/mol} = \underline{194\ mol.}$$

Med molbrøk

$$x_s = \frac{n_r}{n_v + n_r} \approx \frac{n_r}{n_v}$$

blir antall mol rørsukker

$$n_r = x_s n_v = 1{,}354 \cdot 10^{-3} \cdot 194\,mol = \underline{0{,}263\ mol.}$$

Mengden rørsukker oppløst blir dermed

$$m = 342\,g/mol \cdot 0{,}263\,mol = \underline{\underline{90\,g.}}$$

c) Ved ideell blanding er indre energi og volum uendret ved blandingen mens entropien endrer seg. Endringen i entropi er som blandingsentropien for ideelle gasser.

Avvik i kjemisk potensial er gitt ved

$$\Delta\mu_1 = \frac{\partial \Delta G}{\partial N_1} = a\frac{\partial}{\partial N_1}(N x_1 x_2) = a\frac{\partial}{\partial N_1}\left(\frac{N_1 N_2}{N_1+N_2}\right)$$

$$= a\left[\frac{N_2}{N_1+N_2} - \frac{N_1 N_2}{(N_1+N_2)^2}\right] = a(x_2 - x_1 x_2)$$

$$= \underline{\underline{a x_2^2}} = \underline{\underline{a(1-x_1)^2.}}$$

da $x_1 + x_2 = 1$.

Tilsvarende finner en

$$\Delta\mu_2 = \underline{\underline{a x_1^2.}}$$

Oppgave 3.

a) Netto partikkelstrømtetthet gjennom en finner en ved å integrere over alle retningene

$$j_z = \int dj_z = \int v\cos\theta\, n\, F(v)\, d\vec{v}$$
$$= \int \left(n(z) - \lambda\cos\theta \frac{\partial n}{\partial z}\right) v\cos\theta\, F(v)\, v^2 dv\, d\Omega .$$

Da $\int \cos\theta\, d\Omega = 0$ vil ikke $n(z)$-leddet bidra.
For det andre leddet har en

$$\int \cos^2\theta\, d\Omega = \frac{4\pi}{3}.$$

Med $4\pi v^2 dv = d\vec{v}$ har en videre

$$\langle v\rangle = \int v\, F(v)\, d\vec{v}$$

slik at alt i alt

$$j_z = -\lambda\, \frac{1}{3}\langle v\rangle \frac{\partial n}{\partial z}.$$

Ved å sammenlikne med $\vec{j} = -D\nabla n$ finner en at diffusjonskonstanten blir

$$\underline{\underline{D = \frac{1}{3}\lambda\langle v\rangle.}}$$

b) Grensebetingelsen $T = T_1$ ved $R = R_1$ gir

$$T_1 = A(\ln R_1 - \ln R_2) + T_2$$
$$A = \frac{T_2 - T_1}{\ln R_2 - \ln R_1} = \underline{\underline{\frac{T_2 - T_1}{\ln(R_2/R_1)}.}}$$

Varmestrømtettheten i radiell retning er gitt ved

$$j_r = -\kappa\frac{\partial T}{\partial r} = -\kappa\frac{A}{r}.$$

En rørlengde L med radius r vil ha areal

$$S = 2\pi r L$$

slik at total varmestrøm blir

$$\dot{Q} = j\cdot S = -\kappa\frac{A}{r}2\pi r L = -2\pi L\kappa A = \underline{\underline{C_1(T_1 - T_2)}}$$

der

$$\underline{\underline{C_1 = 2\pi L\frac{\kappa}{\ln(R_2/R_1)}.}}$$

c) Ved grenseflata mellom de 2 lagene vil det være en temperatur T_0. Varmestrømmen gjennom de 2 lagene vil være den samme, og er gitt ved

$$\dot{Q}_n = C_1(T_1 - T_0) = C_2(T_0 - T_2)$$

Ved å betrakte temperaturforskjellene finner en

$$T_1 - T_0 = \dot{Q}_n / C_1$$
$$T_0 - T_2 = \dot{Q}_n / C_2$$
$$\overline{T_1 - T_2 = (C_1^{-1} + C_2^{-1})\,\dot{Q}_n}$$
$$\dot{Q}_n = \frac{T_1 - T_2}{C_1^{-1} + C_2^{-1}} = \frac{C_1 C_2 (T_1 - T_2)}{C_2 + C_1}.$$

Med dette blir forholdet

$$F = \frac{\dot{Q}_n}{\dot{Q}} = \underline{\underline{\frac{C_2}{C_2 + C_1}.}}$$