NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Kontakt under eksamen:
Jon Andreas Støvneng
Telefon: 73 59 36 63

LØSNINGSFORSLAG TIL
EKSAMEN FY1013 ELEKTRISITET OG MAGNETISME II
Tirsdag 3. juni 2008 kl. 0900 - 1300

Hjelpemidler: C

- K. Rottmann: Matematisk formelsamling
- O. Øgrim og B. E. Lian eller C. Angell og B. E. Lian: Fysiske størrelser og enheter.
- Typegodkjent kalkulator, med tomt minne, i henhold til liste utarbeidet av NTNU (HP30S eller lignende).

Eksamen bestod av 4 oppgaver. Det er angitt i forbindelse med hver enkelt oppgave hvor mye den teller under bedømmelsen. Dette løsningsforslaget består av 6 sider, inklusive denne.

OPPGAVE 1 (Teller 15%)

1: B. Strøm I i positiv x-retning tilsvarer driftshastighet i positiv x-retning for positive ladningsbærere og i negativ x-retning for negative ladningsbærere. Avbøyningskraften på grunn av magnetfeltet, $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, blir dermed i negativ y-retning uansett fortegn på ladningen q.

2: A. Halvledere har typisk et energigap av størrelsesorden 1 eV. Hvis gapet er så stort som 10 eV, har vi en isolator.

3: B. Ved en gitt temperatur er produktet av elektron- og hullkonsentrasjonene konstant. For rent silisium finner vi at denne konstanten er 10^{20} cm^{-6}. Dersom silisium forurenses med akseptoratomer slik at hullkonsentrasjonen øker til 10^{15}cm^{-3}, må elektronkonsentrasjonen bli redusert til 10^{5}cm^{-3}.

4: A. En pn-overgang fører en liten (drifts-)strøm når den påtrykte spenningen V er negativ. Med $V > 0$ vokser (diffusjons-)strømmen eksponentielt.

5: D. Impedansen til en kapasitans er $1/i\omega C$. Den blir altså mindre jo høyere frekvensen er. Følgelig vil en kapasitans nærme seg en kortslutning for økende frekvenser. Ettersom impedansen blir mindre jo høyere C er, må vi få den største strømstyrken i grenen med C_2.

6: D. Vi legger sammen parallellkoblede impedanser på samme måte som parallellkoblede resistanser i en likestrømkrets. Dermed:

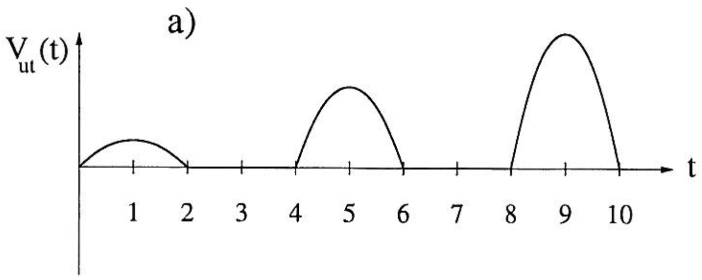
$$Z = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{i\omega L}\right)^{-1} = \frac{i\omega RL}{R + i\omega L}$$

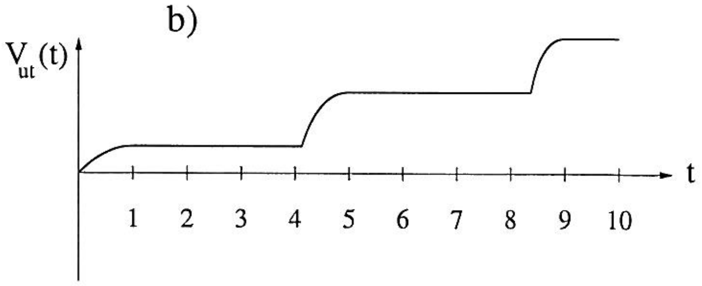
OPPGAVE 2 (Teller 15%)

Dioden kan (tilnærmet) erstattes av en kortslutning, $V_D = 0$, når $I > 0$ og en åpen krets, $I = 0$, når $V_D < 0$. Her er V_D spenningen over D mens I er strømmen i kretsen.

a) I denne kretsen vil strømmen I være positiv så lenge V_{in} er positiv, mens negativ V_{in} betyr negativ spenning over dioden, og dermed $I = 0$. Med kortsluttet diode er $V_{\text{ut}} = V_{\text{in}}$, med dioden som åpen krets er $V_{\text{ut}} = 0$. Resulterende $V_{\text{ut}}(t)$ er skissert i figur *a)* nedenfor. Kretsen blir en såkalt halvbølge likeretter.

b) Med ladning $(\pm)Q$ på kondensatoren er $I = dQ/dt$ og $V_{\text{ut}} = Q/C$. Mellom $t = 0$ og $t = 1$ øker V_{in} hele tiden. Dermed øker også Q slik at $I > 0$. Dioden er kortsluttet og $V_{\text{ut}} = V_{\text{in}}$. Ved $t = 1$ blir V_{in} mindre. Uten dioden til stede ville Q også ha blitt mindre, dvs I ville ha blitt negativ. Men den ideelle dioden leder ikke strøm i negativ retning, så ved $t = 1$ blir $I = 0$ og dioden blir en åpen krets. Null strøm betyr konstant ladning Q, og dermed konstant V_{ut}. Først når V_{in} igjen blir like stor som V_{ut}, dvs like etter $t = 4$, er $V_D = 0$, og I kan igjen bli positiv. Dioden er igjen kortsluttet og $V_{\text{ut}} = V_{\text{in}}$ inntil V_{in} når sin neste maksimalverdi, ved $t = 5$. Fra $t = 5$ til $t \simeq 8.5$ har vi så en konstant V_{ut}, fra $t \simeq 8.5$ til $t = 9$ er $V_{\text{ut}} = V_{\text{in}}$, og endelig fra $t = 9$ til $t = 10$ er V_{ut} konstant. Den resulterende $V_{\text{ut}}(t)$ er skissert i figur *b)* nedenfor. Vi ser at V_{ut} hele tiden tilsvarer den hittil maksimale positive verdien av V_{in}.





OPPGAVE 3 (Teller 30%)

Den første halve perioden, fra $t = 0$ til $t = \pi/\omega$, er dioden til venstre kortsluttet mens dioden til høyre er åpen. Det betyr at vi har en påtrykt spenning V_1 over en parallellkobling av R og $R + 3R$. Strømmen I_2, som nå går gjennom de to motstandene R og $3R$, blir

$$I_2(t) = \frac{V_1(t)}{4R} = \frac{V_0}{4R} \sin \omega t$$

så spenningen V_2 blir

$$V_2(t) = \frac{V_0}{4} \sin \omega t$$

Strømmen gjennom R blir

$$\hat{I}(t) = \frac{V_0}{R} \sin \omega t$$

slik at total strøm blir

$$I(t) = I_2(t) + \hat{I}(t) = \frac{5V_0}{4R} \sin \omega t$$

Den neste halve perioden, fra $t = \pi/\omega$ til $t = 2\pi/\omega$, er dioden til høyre kortsluttet mens dioden til venstre er åpen. Det betyr at vi har en påtrykt spenning V_1 over en parallellkobling av $3R$ og $R + R$. Strømmen I_2, som nå går gjennom de to motstandene R og R, blir

$$I_2(t) = \left| \frac{V_1(t)}{2R} \right| = \frac{V_0}{2R} |\sin \omega t|$$

så spenningen V_2 blir

$$V_2(t) = \frac{V_0}{2} |\sin \omega t|$$

Strømmen gjennom $3R$ blir

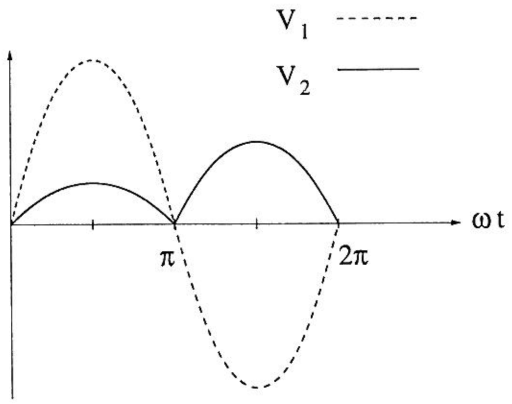
$$\hat{I}(t) = \frac{V_0}{3R}|\sin \omega t|$$

slik at total strøm blir

$$I(t) = I_2(t) + \hat{I}(t) = \frac{5V_0}{6R}|\sin \omega t|$$

Her har vi satt på absoluttverditegn fordi f.eks. I_2 er positiv (dvs med retning som i figuren i oppgaveteksten) selv om V_1 er negativ.

Skisse av V_1 og V_2:



Midlere effekt i den midtre motstanden i første halve periode:

$$\langle P_n \rangle_1 = \frac{R}{2}\left(\frac{V_0}{4R}\right)^2 = \frac{V_0^2}{32R}$$

Midlere effekt i den midtre motstanden i andre halve periode:

$$\langle P_n \rangle_2 = \frac{R}{2}\left(\frac{V_0}{2R}\right)^2 = \frac{V_0^2}{8R}$$

Midlere effekt i den midtre motstanden over en hel periode:

$$\langle P_n \rangle = \frac{\langle P_n \rangle_1 + \langle P_n \rangle_2}{2} = \frac{5V_0^2}{64R}$$

Vi har regnet ut total strøm I ovenfor. Når en vekselspenningskilde V leverer en vekselstrøm I, er midlere effekt lik

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}V_0 I_0 \cos \alpha$$

der α er faseforskjellen mellom V og I og V_0 og I_0 er amplitudene til henholdsvis V og I. Her er det bare motstander til stede, så $\alpha = 0$. Dermed:
Midlere total effekt i første halve periode:

$$\langle P_{\text{tot}} \rangle_1 = \frac{V_0}{2} \cdot \frac{5V_0}{4R} = \frac{5V_0^2}{8R}$$

Midlere total effekt i andre halve periode:

$$\langle P_{\text{tot}}\rangle_2 = \frac{V_0}{2}\cdot\frac{5V_0}{6R} = \frac{5V_0^2}{12R}$$

Midlere total effekt over en hel periode:

$$\langle P_{\text{tot}}\rangle = \frac{\langle P_{\text{tot}}\rangle_1 + \langle P_{\text{tot}}\rangle_2}{2} = \frac{25V_0^2}{48R}$$

Utnyttelsesgraden blir dermed

$$\eta = \frac{\langle P_n\rangle}{\langle P_{\text{tot}}\rangle} = \frac{15}{100}$$

dvs 15 %.

OPPGAVE 4 (Teller 40%)

Kretsens impedans er

$$Z = R + \left(i\omega C + \frac{1}{i\omega L}\right)^{-1} = R + i\frac{\omega L}{1-\omega^2 LC} \quad (\equiv R + iX)$$

Spenningsamplituden over L og C blir:

$$\begin{aligned}
V_{\text{ut}} &= |V_{\text{in}} - RI| \\
&= \left|V_{\text{in}} - R\frac{V_{\text{in}}}{Z}\right| \\
&= V_{\text{in}}\left|\frac{Z-R}{Z}\right| \\
&= V_{\text{in}}\left|\frac{iX}{Z}\right| \\
&= V_{\text{in}}\left|\frac{i\omega L/(1-\omega^2 LC)}{R + i\omega L/(1-\omega^2 LC)}\right| \\
&= V_{\text{in}}\left|1 + \frac{R(1-\omega^2 LC)}{i\omega L}\right|^{-1}
\end{aligned}$$

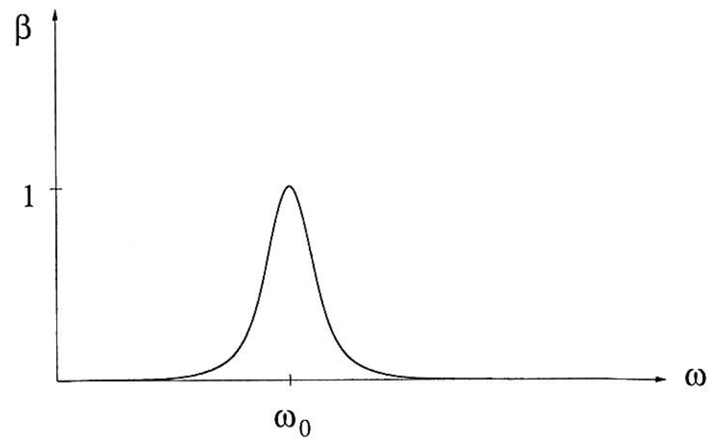
Amplitudeforholdet $V_{\text{ut}}/V_{\text{in}}$ blir altså

$$\beta(\omega) = \left(1 + \frac{R^2(1-\omega^2 LC)^2}{\omega^2 L^2}\right)^{-1/2}$$

som er på den oppgitte formen, med $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Innsetting gir

$$\begin{aligned}
\beta(0) &= 0 \\
\beta(\omega_0) &= 1 \\
\beta(\infty) &= 0
\end{aligned}$$

Skisse av $\beta(\omega)$:



Radiostasjonen "Bare politikk" sender på vinkelfrekvens $2\pi \cdot 15.900$ MHz $\simeq 99.90$ MHz, mens "Bare musikk" sender på vinkelfrekvens $2\pi \cdot 15.915$ MHz $\simeq 100.00$ MHz. Avstanden i vinkelfrekvens mellom disse to er altså $\Delta\omega = 0.1$ MHz. La meg her velge "Bare musikk", slik at $\omega_0 = 100.00$ MHz og $\tilde{\omega} = 99.90$ MHz. Med $L = 10^{-8}$ H må vi da ha en kapasitans

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = 10^{-8} \text{ F}$$

Vi har ovenfor funnet at $\beta(\omega_0) = 1$, så det oppgitte kriteriet blir

$$\beta(\tilde{\omega}) \leq \frac{1}{\sqrt{101}}$$

eventuelt

$$\frac{R^2(1 - \tilde{\omega}^2/\omega_0^2)^2}{\tilde{\omega}^2 L^2} \geq 100$$

Innsetting av tallverdier for L, ω_0 og $\tilde{\omega}$ gir

$$R \geq 4997.5 \ \Omega$$

eller 5 kΩ.
Hvis vi velger "Bare politikk", blir $\omega_0 = 99.90$ MHz og $\tilde{\omega} = 100.00$ MHz, slik at vi må ha en kapasitans

$$C = \frac{1}{\omega_0^2 L} = 1.002 \cdot 10^{-8} \text{ F}$$

Kravet til motstanden blir også nå $R \geq 5$ kΩ.