Løsning, eksamen FY2450 Astrofysikk
Fredag 21. mai 2010

1a) Et stort teleskop (som har lysåpning med diameter D) samler mye lys (lysmengden pr. tid er proporsjonal med D^2), og har god vinkeloppløsning (minste vinkel som kan oppløses, med lys av bølgelengde λ, er $\Delta\theta \approx \lambda/D$).

Jordatmosfæren er gjennomsiktig bare for noen deler av spektret av elektromagnetiske bølger, først og fremst synlig lys og radiobølger, men ikke for infrarød og ultrafiolett stråling, røntgenstråling og gammastråling. Med et teleskop utenfor jordatmosfæren kan en observere hele det elektromagnetiske spektret. Dessuten unngår en at vinkeloppløsningen begrenses av turbulens i atmosfæren.

Andre fordeler og ulemper med teleskop på bakken og i rommet kan nevnes. På bakken er skyer og lysspredning i atmosfæren et problem, det er dagslys om dagen og gatelys om natten. Å snu et stort bakketeleskop mot forskjellige mål på himmelen er heller ikke et trivielt problem, f.eks. fordi et tungt speil deformeres av sin egen tyngde.

1b) En solflekk er et mørkere område av soloverflaten (fotosfæren), stort nok til å sluke mange jordkloder, og det er mørkere enn omgivelsene fordi temperaturen er 1500–2000 grader lavere.

En annen viktig forskjell mellom solflekken og omgivelsene er at magnetfeltet er sterkere i flekken. Årsaken til at flekken er kaldere, er trolig at magnetfeltet hindrer konveksjonen som transporterer varme fra det indre av Sola.

Solflekker opptrer gjerne i grupper, med størst utstrekning parallelt med ekvator. Under en og samme solflekksyklus kan den fremste store flekken i en gruppe, i den retningen Sola roterer, være en magnetisk nordpol, og den bakerste en magnetisk sørpol, for alle grupper på den nordlige halvkulen. På den sørlige halvkulen har magnetfeltene motsatt polaritet. I neste syklus snur polariteten på magnetfeltene, både på den nordlige og sørlige halvkulen.

Det er to tydelige forskjeller mellom solflekker som kommer sist i en 11-års syklus og først i neste syklus. Tidlig i en syklus kommer flekkene langt fra ekvator, sent i syklusen kommer de nær ekvator. Dessuten har, som sagt, magnetfeltene motsatt polaritet i to påfølgende sykler.

1c) Det var ikke spørsmål etter formler, her er likevel noen formler.

Når lyskilden sender ut lys med bølgelengden λ_0, og observatøren ser det samme lyset med bølgelengden λ, så defineres

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 \ .$$

Hvis $z > 0$ kalles det rødforskyving, og hvis $z < 0$ kalles det blåforskyving. Terminologien gir mening for synlig lys.

Doppler-rødforskyving opptrer når lyskilden og observatøren beveger seg bort fra hverandre, slik at lyset får stadig lenger vei å gå. Når den relative hastigheten er v, liten sammenlignet med lyshastigheten c, så er

$$z = \frac{v}{c} \ .$$

Hvis lyskilden og observatøren beveger seg mot hverandre, så er pr. definisjon $v < 0$, og da er $z < 0$ i følge formelen.

Gravitasjonsrødforskyving opptrer når lyset må bevege seg oppover i et gravitasjonsfelt fra lyskilden til observatøren. Hvis gravitasjonspotensialet er ϕ_0 for lyskilden og ϕ for observatøren, så er

$$z = \frac{\phi - \phi_0}{c^2} \ .$$

Merk: det blir ingen netto gravitasjonsrødforskyving av at lyset beveger seg inn i og ut av gravitasjonsfeltet rundt en planet, en stjerne, en galakse eller en galaksehop.

Kosmologisk rødforskyving er rødforskyving i lyset fra fjerne galakser, eller andre objekter like langt borte. Den kan tolkes som en form for Doppler-forskyving, som skyldes at avstanden mellom lyskilden og observatøren øker.

En annen måte å beskrive (eller forstå?) den samme effekten på, er at Universet ekspanderer, og lysbølgene strekkes like mye som Universet ekspanderer. Hvis skalafaktoren (i Friedmann–Robertson–Walker-metrikken) er R_1 når lyset sendes ut, og R_2 når det samme lyset observeres, så er

$$z = \frac{R_2}{R_1} - 1 \ .$$

1d) Når jetstrålene beveger seg med 26 % av lyshastigheteten c, så blir den relativistiske tidsdilatasjonen en viktig effekt. En klokke som beveger seg med hastighet $v = 0,26\,c$ går sakte med en faktor

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} = \sqrt{1 - 0{,}26^2} = \sqrt{1{,}26 \times 0{,}74} = 0{,}9656 = \frac{1}{1{,}0356} \ .$$

Mesteparten av tiden vil en av jetstrålene ha en hastighetskomponent fra oss, mens den motsatte strålen har en hastighetskomponent mot oss. For enkelhets skyld ser vi bare på det spesialtilfellet at begge jetstrålene beveger seg vinkelrett på synsretningen. Da vil tidsdilatasjonen gi en rødforskyving der alle frekvenser av lyset blir en faktor γ mindre, og følgelig alle bølgelengder av lyset blir en faktor γ større, slik at

$$z = \gamma - 1 = 0{,}0356 \ .$$

Denne relativistiske effekten kalles den transverse Doppler-effekten.

Den er like stor som den Doppler-rødforskyvingen som observeres når hastigheten i synsretningen, bort fra observatøren, er

$$v = zc = (\gamma - 1)\,c = 0{,}0356 \times 300\,000 \text{ km/s} = 10\,680 \text{ km/s} \ .$$

Merk: at bølgelengden forandres, har *ikke* noe direkte å gjøre med Lorentz-kontraksjon.

1e) Mørk materie er materie som ikke observeres direkte ved at den sender ut lys, men som observeres indirekte ved at den virker på annen materie gjennom gravitasjon.

For å kunne konkludere med at det finnes mørk materie i Universet, må vi altså stole på de gjeldende teoriene for gravitasjon.

Dessuten må vi stole på at galakser og galaksehoper er stabile objekter, som ikke er i ferd med å gå i oppløsning ved at stjernene i galaksen, eller galaksene i galaksehopen, flyr fra hverandre.

En type observasjoner som tyder på at det finnes mørk materie i galaksehoper, er at galaksene i en hop beveger seg med så store hastigheter at gravitasjonskreftene fra den lysende materien (altså stjernene i galaksene) ikke er tilstrekkelig til å holde hopen sammen. Testen på om en galaksehop er stabil eller ikke, er om virialteoremet er oppfylt: om $2E_k + V = 0$, der E_k er den totale kinetiske energien til galaksene, og V er den totale potensielle gravitasjonsenergien. Et viktig poeng er at E_k varierer lineært med massene til galaksene, mens V varierer kvadratisk. For eksempel, hvis vi dobler alle massene, så multipliseres E_k med en faktor to og V med en faktor fire. Hvis vi finner at virialteoremet ikke er oppfylt, så kan vi reparere det ved å skalere alle massene med en passende faktor.

En annen type observasjoner som tyder på at det finnes mørk materie i individuelle galakser, er at rotasjonskurven til en spiralgalakse alltid flater ut når avstanden fra sentrum i galaksen blir stor. Det vil si: galaksen roterer slik at hastigheten til stjernene blir konstant, uavhengig av avstanden fra sentrum. Problemet med en slik rotasjonskurve er at lyset fra stjernene i galaksen avtar eksponensielt med avstanden fra sentrum. Det betyr at den synlige massen er så mye konsentrert inn mot sentrum at stjernene langt ute burde følge tilnærmet Keplers tredje lov: hastigheten burde ikke være konstant, men heller omvendt proporsjonal med kvadratroten av avstanden fra sentrum.

Mørk materie og mørk energi er to vidt forskjellige fenomener. Begge spiller en vesentlig rolle i gjeldende kosmologiske modeller. Den kritiske energitettheten i kosmologien er den som er akkurat stor nok til å gjøre det tredimensjonale rommet flatt: er tettheten større, så har rommet positiv krumning (som en kuleflate), og er tettheten mindre, så har rommet negativ krumning (som en sadelflate).

Den materien som er synlig i form av stjerner (den lysende materien), utgjør ikke mer enn 0,5 % av den kritiske energitettheten. Den baryoniske materien (den typen materie som vi er laget av) utgjør 5 % av den kritiske energitettheten, i følge beregningene av kjernesyntesen i Den Store Smellen (Big Bang). Disse beregningene stemmer med målte mengdeforhold mellom hydrogen, deuterium, helium, litium bare dersom mengden av baryonisk materie er akkurat så stor, innenfor en ganske liten margin.

I følge gjeldende kosmologiske modeller er den totale energitettheten nokså nær lik den kritiske, og i tillegg til 5 % baryonisk materie består den av 25 % mørk ikke-baryonisk materie (dvs. materie av en helt ukjent type) og 70 % mørk energi (vakuum-energi).

Forskjellen mellom mørk materie og mørk energi, fra et kosmologisk sysnspunkt, er tilstandsligningene. For den mørke materien er trykket tilnærmet lik null. For den mørke energien er trykket negativt og lik minus energitettheten. Negativt trykk er det samme som strekk (lignende som strekket i en gummistrikk).

Det negative trykket gir frastøtende gravitasjon, som akselererer ekspansjonen av Universet, i følge Einsteins gravitasjonsteori.

2a) Lyskurven inneholder svært mye informasjon, så et fullstendig svar her må bli en hel liten avhandling.

To stjerner, kall dem A og B, går i bane rumdt hverandre og formørker hverandre etter tur. Hvert minimum i lyskurven skyldes en formørkelse. Det faktum at de formørker hverandre, beviser at synslinjen mot oss tilfeldigvis ligger omtrent i baneplanet.

Omløpsperioden for de to stjernene er $P = (61 \pm 1)$ time, som målt på figuren. I løpet av en periode er det to formørkelser. Åtte døgn tilsvarer 150 mm på figuren, to perioder tilsvarer 95 mm, det gir at perioden er

$$P = \frac{95 \text{ mm} \times 8 \times 24 \text{ h}}{150 \text{ mm} \times 2} = 60{,}8 \text{ h} .$$

Anta f.eks. at A har større radius enn B. Da kan A totalformørke B, men B kan ikke totalformørke A.

Ved 2. og 4. minimum i figuren er lyskurven flat i bunnen, det er når A totalformørker B. Bunnen er flat fordi vi ser like mye lys fra A hele tiden mens B er gjemt bak A.

Ved 1., 3. og 5. minimum i figuren er lyskurven ikke flat i bunnen, men litt avrundet, det er når B formørker A. Under hele den fasen der hele B er foran A, så dekker B hele tiden et like stort areal (vinkelareal, romvinkel) av A. Men randfordunklingen av A gjør at formørkelsen blir dypere jo nærmere sentrum av A det formørkede arealet ligger. Derfor blir bunnen av lyskurven ikke helt flat. Randfordunkling, av Sola og andre stjerner, er det fenomenet at når vi ser mot sentrum av solskiva, ser vi dypere og varmere, og derfor lysere, lag i solatmosfæren enn når vi ser mot kanten av solskiva.

Formørkelsene er ikke langt unna å være sentrale, slik at vi ser sentrum av den ene stjernen passere nær sentrum av den andre. Det ser vi på de skarpe kantene av lyskurven, bl.a. ved minimum 2 og 4 der A totalformørker B. Hvis vi hadde sett de to skivene bare så vidt streife hverandre, så ville lyskurven ha fått runde kanter.

Videre viser lyskurven at banen er tilnærmet sirkulær, altså at eksentrisiteten er liten. Anta nemlig, som et tankeeksperiment, at banen er mye eksentrisk.

Dersom ellipsen har store halvakse vinkelrett på synsretningen, så vil tidsintervallene mellom formørkelsene bli forskjellige, fordi stjernene bruker mest tid i den delen av banen der de er langt fra hverandre, i følge Keplers 2. lov.

Dersom ellipsen har store halvakse langs synsretningen, så vil varigheten av formørkelsene bli forskjellige. Varigheten er (sånn omtrent) summen av diametrene dividert med banehastigheten, og i følge Keplers 2. lov er banehastigheten størst når stjernene er nært hverandre.

Vi kjenner ikke banehastigheten, uten å ha målinger av Doppler-forskyvinger av spektrallinjer. Men vi kan gjette på en eller annen fornuftig verdi for summen av massene, la oss si 2–5 solmasser, eller $M_A + M_B = 3$ solmasser, for å ha et tall å regne med. Keplers 3. lov gir oss da en omtrentlig verdi for avstanden a mellom de to stjernene (a er store halvakse i ellipsebanen):

$$\frac{a}{1 \text{ AU}} = \sqrt[3]{\left(\frac{P}{1 \text{ år}}\right)^2 \frac{M_A + M_B}{1\, M_\odot}} = \sqrt[3]{\left(\frac{61 \text{ h}}{365{,}25 \times 24 \text{ h}}\right)^2 \times 3} = 0{,}053 .$$

Altså

$$a = 0{,}053 \text{ AU} = 7{,}9 \times 10^6 \text{ km} .$$

Si 8 milloner kilometer, det er elleve solradier, pluss minus neppe mer enn 10–20 %.

Hver formørkelse varer $(7{,}2 \pm 1)$ time, som tilsvarer 5,6 mm målt på figuren. Det gir oss et estimat for summen av radiene til de to stjernene:

$$\frac{2(R_A + R_B)}{2\pi a} = \frac{7{,}2 \text{ h}}{61 \text{ h}} = \frac{5{,}6 \text{ mm}}{47{,}5 \text{ mm}} = 0{,}118 \ ,$$

altså

$$R_A + R_B = 0{,}118 \times \pi a = 2{,}9 \times 10^6 \text{ km} \ .$$

At summen av radiene er fire solradier, høres ganske rimelig ut.

Den fasen der A totalformørker B, varer i 2,6 time, nemlig 2,0 mm på figuren, som svarer til

$$F = \frac{2 \text{ mm} \times 8 \times 24 \text{ h}}{150 \text{ mm}} = 2{,}56 \text{ h} \ .$$

Det gir enda en ligning for radiene, nemlig at

$$\frac{R_A - R_B}{R_A + R_B} = \frac{2{,}6 \text{ h}}{7{,}2 \text{ h}} = \frac{2{,}0 \text{ mm}}{5{,}6 \text{ mm}} = 0{,}36 \ .$$

Altså:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{1}{2}\,(R_A + R_B + R_A - R_B) = \frac{1{,}36}{2}\,(R_A + R_B) = 2{,}0 \times 10^6 \text{ km} \ , \\ R_B &= R_A + R_B - R_A = 0{,}9 \times 10^6 \text{ km} \ . \end{aligned}$$

Stefan–Boltzmanns lov gir relasjonen mellom luminositet L, radius R og overflatetemperatur T,

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4 \ .$$

A har både litt større radius og litt høyere overflatetemperatur enn B. At temperaturen er høyere på A, ser vi av at vi får et dypere minimum i lyskurven når den formørkes (arealet som formørkes er det samme enten B er foran eller bak A).

Vi kan til og med finne forholdet mellom overflatetemperaturene, ved hjelp av Stefan–Boltzmanns lov. Vi ser av figuren at når B totalformørkes (ved minimum 2 og 4), så ville lysstyrken uten formørkelse ha vært $b_1 = 0,992$ (husk at lysstyrken er oppgitt i vilkårlige enheter), mens lysstyrken med formørkelse er $b_2 = 0,891$. Når A formørkes (ved minimum 1, 3 og 5), så ville lysstyrken uten formørkelse ha vært $b_3 = 0,990$, mens lysstyrken med formørkelse er $b_4 = 0,862$. Forholdet mellom temperaturene er da

$$\frac{T_B}{T_A} = \sqrt[4]{\frac{b_1 - b_2}{b_3 - b_4}} = \sqrt[4]{\frac{0{,}101}{0{,}128}} = 0{,}942 = \frac{1}{1{,}061} \ .$$

Når B totalformørkes, så reduseres luminositeten av dobbeltstjernesystemet fra $b_1 = 0{,}992$ til $b_2 = 0{,}891$, det gir følgende relasjon mellom luminositetene:

$$\frac{L_A}{L_A + L_B} = \frac{b_2}{b_1} \ ,$$

eller ekvivalent,

$$\frac{L_B}{L_A} = \frac{b_1}{b_2} - 1 = \frac{b_1 - b_2}{b_2} = \frac{0{,}101}{0{,}891} = 0{,}113 \ .$$

Tilsammen gir dette oss forholdet mellom radiene som

$$\frac{R_B}{R_A} = \sqrt{\frac{L_B}{L_A}} \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2 = \sqrt{\frac{b_1 - b_2}{b_2} \frac{b_3 - b_4}{b_1 - b_2}} = \sqrt{\frac{b_3 - b_4}{b_2}} = \sqrt{\frac{0{,}128}{0{,}891}} = 0{,}379 \ .$$

Ovenfor brukte vi en helt annen metode og fant da forholdet $R_B/R_A = 0{,}45$. De to estimatene stemmer godt overens innenfor usikkerheten (som nok er størst ved den første metoden, når vi må lese data ut av en kurve som er tegnet med mindre nøyaktighet enn den fulle nøyaktigheten i dataene).

Til slutt står det igjen å forklare formen på lyskurven ved maksimum. De to stjernene er svært nær hverandre, avstanden er bare 2,5 ganger summen av radiene. Derfor vil de være synlig deformerte, strekt ut i retning mot hverandre. Midt mellom to formørkelser ser vi begge stjernene med bredsiden mot oss, og da får vi mest lys fra dem.

En annen effekt er at de to stjernene lyser opp hverandre. Den effekten bidrar til at den totale lysstyrken ikke er konstant mellom to formørkelser, men det er litt mindre opplagt hvor på lyskurven mellom to formørkelser vi skulle vente å finne maksimum, dersom dette var den viktigste årsaken til variasjonen.

2b) En astronom langt borte ser Sola som en skive med areal $A_\odot = \pi R_\odot^2$ og Jorda som en skive med areal $A_J = \pi R_J^2$, der $R_\odot$ er solradien og R_J jordradien. Den brøkdelen av sollyset som Jorda tar bort ved en formørkelse, er da

$$\frac{A_J}{A_\odot} = \left(\frac{R_J}{R_\odot}\right)^2 = \left(\frac{6{,}378 \times 10^3 \text{ km}}{6{,}960 \times 10^5 \text{ km}}\right)^2 = 8{,}40 \times 10^{-5} \ .$$

Det er på grensen av, eller så vidt innenfor, det som CoRoT er i stand til å måle.

Banehastigheten til Jorda er

$$v_J = \frac{2\pi \text{ AU}}{1 \text{ år}} = 29{,}79 \text{ km/s} \ .$$

Den tiden det tar for Jorda å passere over solskiva er da

$$F = \frac{2R_\odot}{v_J} = \frac{2R_\odot \text{ år}}{2\pi \text{ AU}} = \frac{1 \text{ år}}{2\pi \times 107{,}5} = 1{,}48 \times 10^{-3} \text{ år} = 13{,}0 \text{ h} \ .$$

Vinkelen

$$\alpha = \frac{2R_\odot}{1 \text{ AU}} = \frac{2 \times 6{,}96 \times 10^5 \text{ km}}{1{,}496 \times 10^8 \text{ km}} = 9{,}30 \times 10^{-3} = \frac{1}{107{,}5} = 9{,}30 \times 10^{-3} \ \frac{180^\circ}{\pi} = 0{,}533^\circ$$

er vinkeldiameteren til Sola sett fra Jorda.

For å oppdage Jorda med en slik teknikk fra noen hundre lysårs avstand må en altså måle en reduksjon i sollyset på 8 10^{-5} som varer i 13 timer.

2c) Når perioden er $P = 27$ år, og hvis den totale massen er $M_A + M_B = 8\ M_\odot$, så er store halvakse a i ellipsebanen gitt av Keplers 3. lov,

$$\frac{a}{1 \text{ AU}} = \sqrt[3]{\left(\frac{P}{1 \text{ år}}\right)^2 \frac{M_A + M_B}{1\ M_\odot}} = \sqrt[3]{27^2 \times 8} = 3^2 \times 2 = 18 \ .$$

18 AU $= 2{,}7 \times 10^9$ km er litt mindre enn avstanden mellom Sola og planeten Uranus.

For å formørke hovedstjernen i 2 år, må støvskyen ha en diameter d på 2/27 av omkretsen av banen, altså

$$d = \frac{2}{27} \times 2\pi \times 18\ \mathrm{AU} = 8{,}4\ \mathrm{AU} = 1{,}26 \times 10^9\ \mathrm{km}\ .$$

En støvsky uten en eller to stjerner til å holde den samlet, ville være ustabil og bare trekke seg sammen eller spre seg utover. Når den går i bane som en skive (ring) rundt en stjerne, kan den være stabil. Da er det rotasjonen som hindrer den i å trekke seg sammen.

Det er verdt å kommentere figuren, altså lyskurven til ϵ Aurigae. Hvert punkt er en observasjon, gjort av en (amatør-)astronom og samlet inn av foreningen AAVSO. Prinsippet for en slik måling av den tilsynelatende lysstyrken til en variabel stjerne er at en ser to stjerner i samme synsfelt i et lite teleskop, og bedømmer at de er like lyssterke. Når en stjerne er variabel, må en altså ha en serie med referansestjerner som ikke er variable, som har nøyaktig målte lysstyrker, og som ligger nært nok på himmelen til at en kan sammenligne med dem. AAVSO lager stjernekart med passende referansestjerner for hver enkelt variable stjerne.

Som figuren viser, er spredningen i målingene litt mer enn en halv størrelsesklasse. Det er ikke dårlig gjort å bestemme lysstyrken til en stjerne såpass nøyaktig bare på øyemål.

3a) Hvert atom har masse A u og Z elektroner, like mange elektroner som det er protoner i atomkjernen. Derfor er

$$n_e = \frac{Z}{A\ \mathrm{u}}\,\rho\ .$$

3b) Vi finner $Z/A = 0{,}392$ for Sirius B, $Z/A = 0{,}446$ for Procyon B, og $Z/A = 0{,}462$ for 40 Eridani B.

En aktuell atomkjerne er for eksempel ^{12}C, med 6 protoner og 6 nøytroner, den har $Z/A = 6/12 = 0{,}5$, som er litt for stort for alle de tre hvite dvergene.

En annen aktuell atomkjerne er ^{26}Fe, med 26 protoner og 30 nøytroner, den har $Z/A = 26/56 = 0{,}464$, som passer bra for to av de tre hvite dvergene.

Vårt regnestykke er konsistent med at de to minst massive hvite dvergene, Procyon B og 40 Eridani B, begge består av jern. For Sirius B stemmer ikke regnestykket like godt. Forholdet Z/A blir mindre etterhvert oppover i det periodiske systemet av grunnstoffer. Verdien $Z/A = 0{,}392$ er mindre enn for noe grunnstoff opp til og med jern. Sirius B har neppe vært i stand til å produsere grunnstoffer tyngre enn jern, og derfor konkluderer vi at det er noe som ikke stemmer i vår beregning, eller i våre data for Sirius B.

En forklaring kan *muligens* være at Sirius B har så mye som 1,0 solmasse, og det nærmer seg den øvre grensen for hvite dverger, Chandrasekhar-massen, på 1,4 solmasser. Da er elektronene i sentrum ikke så langt unna å bli relativistiske, slik at trykket øker mindre raskt med elektrontettheten, og stjernen får mindre radius enn den ville få dersom elektrongassen var fullstendig ikke-relativistisk.