NTNU

Institutt for fysikk

Løsningsforslag til eksamen i
FY3404 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Tirsdag 30. november 2004

Dette løsningsforslaget er på 7 sider.

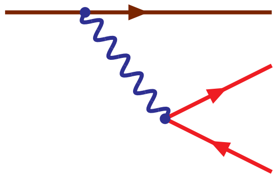
Oppgave 1. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a) $\mu^- \to e^- \gamma$

Umulig prosess i QED. Bryter bevaring av myon- og elektron-tall. Opptrer trolig i virkeligheten, men med svært liten sannsynlighet.

b) $\mu^- \to \mu^- e^+ e^-$

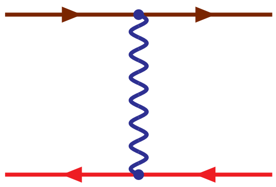


Likevel en umulig prosess pga konservering av firer-impuls.

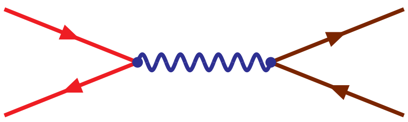
c) $e^+ \mu^- \to e^- \mu^+$

Umulig prosess i QED. Bryter bevaring av myon- og elektron-tall. Opptrer trolig i virkeligheten, men med svært svært liten sannsynlighet.

d) $e^+ \mu^- \to e^+ \mu^-$

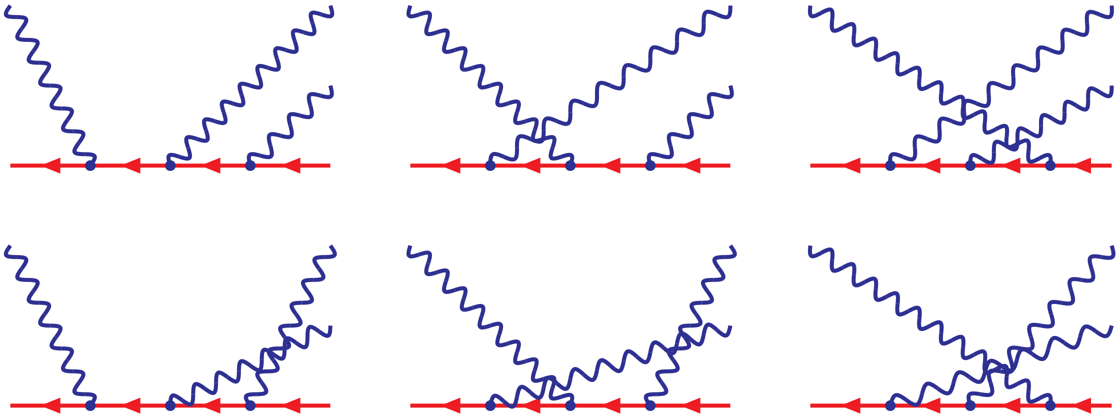


e) $e^+ e^- \to \mu^+ \mu -$

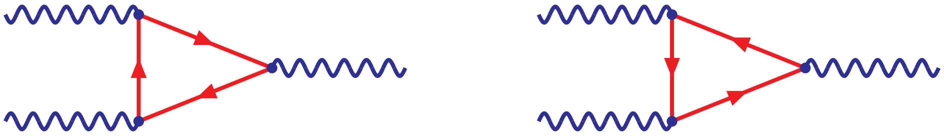


f) $e^+\gamma \to e^+\gamma$

g) $e^+\gamma \to e^+\gamma\gamma$

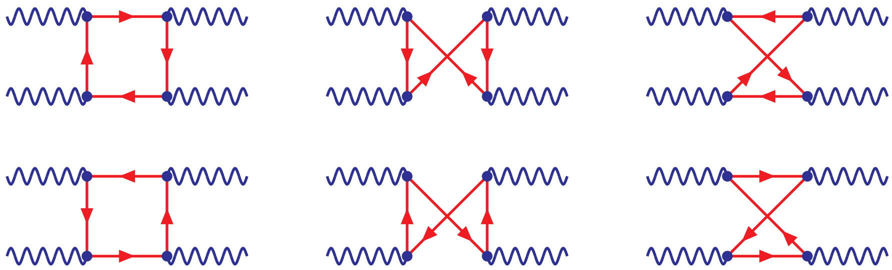


h) $\gamma\gamma \to \gamma$

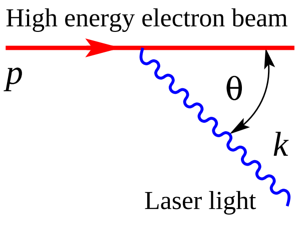


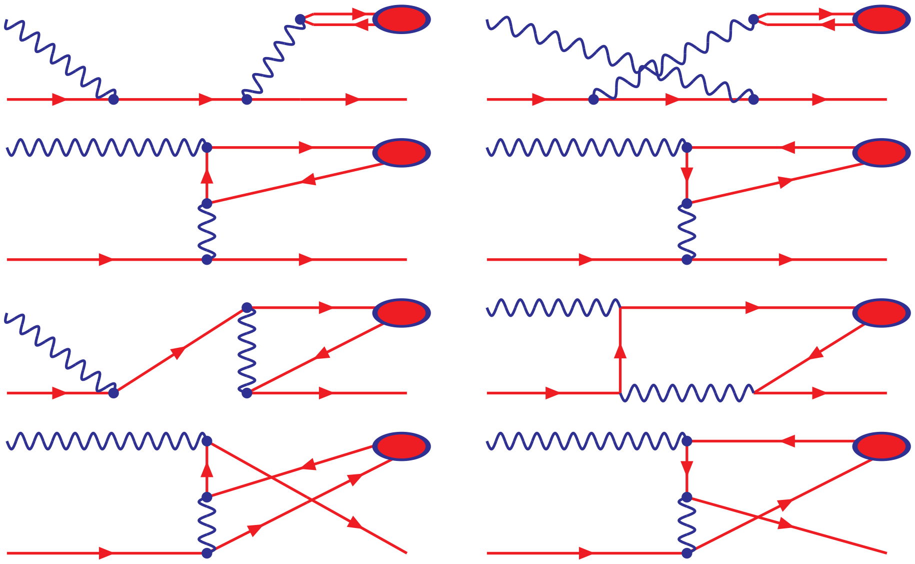
Men bidragene fra disse to amplitudene kansellerer eksakt i *QED* (Furry's teorem) som en konsekvens av invarians under ladningskonjugasjon. Uansett ville prosessen vært umulig pga konservering av firer-impuls.

i) $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$



j) Positronium er et bundet system av et elektron og et positron (med bindingsenergi 6.8 eV). Det har vært foreslått å produsere positronium ved å rette en intens laserstråle mot en høyenergetisk elektronstråle. Dette vil altså føre til kollisjoner med $e^-\gamma$ i starttilstanden.
Hvilke Feynman diagrammer vil da svare til produksjon av positronium (og eventuelt andre partikler)?





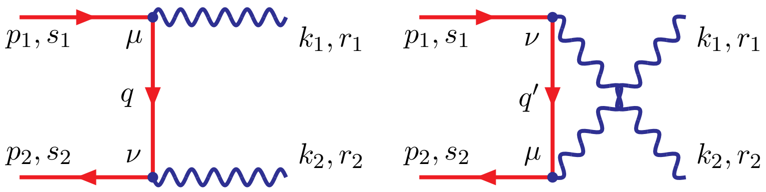
Det viktigste her er å innse at vi må få produsert et (virtuelt) elektron-positron par. Det er ialt 4 laveste ordens diagrammer som bidrar til dette. Ett av de to elektronene vil så binde til positronet (ved utveksling av fotoner) og danne positronium, her symbolisert ved . Det blir derfor ialt 4×2 laveste ordens bidrag til amplituden (selv om man intuitivt forventer at noen av amplitudene vil være små).

Oppgave 2. To-foton annihilasjon av et elektron-positron par

I denne oppgaven skal du se på annihilasjon av et elektron-positron par, $e^+e^- \to \gamma\gamma$. Betrakt prosessen fra massesenter systemet, og regn med naturlige enheter $\hbar = c = 1$ der dette er enklest.

a) Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

Anta at det innkommende elektronet (resp. positronet) har kvantetall p_1, s_1 (resp. p_2, s_2), og at de utgående fotonene har kvantetall k_1, r_1 og k_2, r_2. Innfør videre $q = p_1 - k_1$ og $q' = p_1 - k_2$.



To-foton annihilasjon av et elektron-positron par

b) Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.

Vi har $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{(a)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)}$, med

$$-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}^{(a)} = \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}e)^2}{q^2 - m_e^2} \left[\bar{v}(2)\gamma_\nu(\not{q} + m_e)\gamma_\mu u(1)\right] e^{*\mu}(1)\, e^{*\nu}(2), \tag{1}$$

$$-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}^{(b)} = \frac{\mathrm{i}(\mathrm{i}e)^2}{q'^2 - m_e^2} \left[\bar{v}(2)\gamma_\mu(\not{q}' + m_e)\gamma_\nu u(1)\right] e^{*\mu}(1)\, e^{*\nu}(2), \tag{2}$$

der $u(1) \equiv u_{s_1}(p_1)$, $\bar{v}(2) \equiv \bar{v}_{s_2}(p_2)$, $e^{*\mu}(1) \equiv e^{*\mu}_{r1}(k_1)$, og $e^{*\mu}(2) \equiv e^{*\mu}_{r2}(k_2)$.

c) Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at elektronet har energi $E = 2m_e$. Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.

Oppgitt: $m_e = 0.511$ MeV/c^2
$\hbar = 1.054\,572\,66 \times 10^{-34}$ J s $= 6.582\,122\,0 \times 10^{-16}$ eV s, $c = 299\,792\,458$ m s^{-1}, $e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19}$ C,
$\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137.035\,9895$.

Spredningsamplituden er proporsjonal med e^2, dvs. at spredningstverrsnittet er proporsjonalt med e^4 eller α^2. Tverrsnittet skal ha dimensjon *lengde*^{2}; den eneste parameteren tilgjengelig for dette er m_e eller mer presist $\lambda_e = \frac{\hbar}{m_e c}$. Altså

$$\sigma^{(\text{tot})}_{\text{ann}} \sim (\alpha\lambda_e)^2 = \left(\frac{\alpha\hbar}{m_e c}\right)^2 = \left(2.82 \times 10^{-15}\ \text{m}\right)^2 = 7.94 \times 10^{-30}\ \text{m}^2 = 79.4\ \text{mbarn}. \quad (3)$$

Kombinasjonen $\alpha\lambda_e$ er kjent som *den klassiske elektronradius*, r_e.

Kommentar 1: Her var det en stygg feil i den opprinnelige oppgaveteksten, der det var oppgitt at $m_e = 0.511$ MeV. Dette kan føre til en feil på $\{c^{-4}\} \approx 10^{-34}$ ved utregning i SI-enheter!

Kommentar 2: Det kan jo være interessant å sammenligne dette overslaget med det eksakte tverrsnittet, som er

$$\sigma^{(\text{tot})}_{\text{ann}} = \frac{\pi r_e^2}{\gamma + 1}\left\{\frac{\gamma^2 + 4\gamma + 1}{\gamma^2 - 1}\log\left[\gamma + \sqrt{\gamma^2 - 1}\right] - \frac{\gamma + 3}{\sqrt{\gamma^2 - 1}}\right\}, \quad (4)$$

der $\gamma = E/(m_e c^2)$. For $E = 2m_e c^2$ finner vi derfor at $\sigma^{(\text{tot})}_{\text{ann}} = 2.95\ldots \times r_e^2$, dvs. ganske nær den anslåtte verdien. Men merk at $\sigma^{(\text{tot})}_{\text{ann}} \to \infty$ når $\gamma \to 1^+$ og $\sigma^{(\text{tot})}_{\text{ann}} \to 0$ når $\gamma \to \infty$, så uansett hvilken verdi man anslår for $\sigma^{(\text{tot})}_{\text{ann}}$ så finnes der alltid en γ som det passer for!

d) Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi summerer over spinntilstandene (r_1, r_2) til de utgående fotonene, og midler over spinntilstandene (s_1, s_2) til det innkommende elektron-positron paret. Amplitudekvadratet $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ kan da uttrykkes som en sum av spor over γ-matriser (med prefaktorer).

Finn denne summen. Du trenger foreløbig ikke å regne ut sporene.

Vi bruker kompletthetsrelasjonene,

$$\sum_{r_1 r_2} e^{*\mu}_{r_1}(k_1)\, e^{\bar{\mu}}_{r_1}(k_1)\, e^{*\nu}_{r_2}(k_2)\, e^{\bar{\nu}}_{r_2}(k_2) = \eta^{\mu\bar{\mu}}\ \eta^{\nu\bar{\nu}}, \quad (5)$$

$$\sum_{s_1} u_{s_1}(p_1)\, \bar{u}_{s_1}(p_1) = (\not{p}_1 + m_e)\,, \quad \sum_{s_2} v_{s_1}(p_1)\, \bar{u}_{s_1}(p_1) = (\not{p}_2 - m_e)\,, \quad (6)$$

og finner

$$\frac{1}{4}\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2}\left|\mathcal{M}^{(a)}_{fi} + \mathcal{M}^{(b)}_{fi}\right|^2 =$$

$$\frac{e^4}{\left(q^2 - m_e^2\right)^2}\, T^{aa} + \frac{e^4}{\left(q^2 - m_e^2\right)\left(q'^2 - m_e^2\right)}\,\left(T^{ab} + T^{ba}\right) + \frac{e^4}{\left(q'^2 - m_e^2\right)^2}\, T^{bb}, \quad (7)$$

der

$$
\begin{aligned}
T^{aa} &= \frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2} \left[\bar{v}(2)\gamma_\nu(\not{q} + m_e)\gamma_\mu u(1)\right]\left[\bar{u}(1)\gamma^\mu(\not{q} + m_e)\gamma^\nu v(2)\right] \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\,\gamma_\nu(\not{q} + m_e)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\mu(\not{q} + m_e)\gamma^\nu(\not{p}_2 - m_e)\,\right], \\
T^{ab} &= \frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2} \left[\bar{v}(2)\gamma_\nu(\not{q} + m_e)\gamma_\mu u(1)\right]\left[\bar{u}(1)\gamma^\nu(\not{q}' + m_e)\gamma^\mu v(2)\right] \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\,\gamma_\nu(\not{q} + m_e)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu(\not{q}' + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_2 - m_e)\,\right], \\
T^{ba} &= \frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2} \left[\bar{v}(2)\gamma_\mu(\not{q}' + m_e)\gamma_\nu u(1)\right]\left[\bar{u}(1)\gamma^\mu(\not{q} + m_e)\gamma^\nu v(2)\right] \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\,\gamma_\nu(\not{q}' + m_e)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\mu(\not{q} + m_e)\gamma^\nu(\not{p}_2 - m_e)\,\right], \\
T^{bb} &= \frac{1}{4}\sum_{s_1 s_2} \left[\bar{v}(2)\gamma_\mu(\not{q}' + m_e)\gamma_\nu u(1)\right]\left[\bar{u}(1)\gamma^\nu(\not{q}' + m_e)\gamma^\mu v(2)\right] \\
&= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\,\gamma_\mu(\not{q}' + m_e)\gamma_\nu(\not{p}_1 + m_e)\gamma^\nu(\not{q}' + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_2 - m_e)\,\right].
\end{aligned}
$$

Faktoren $\frac{1}{4}$ skyldes at vi skal midle over spinnet til elektron-positron paret (fire ortogonale muligheter).

e) Anta nå at energien E til det innkommende elektronet er mye større enn dets hvileenergi, $E \gg m_e$, slik at man kan sette $m_e = 0$ i alle uttrykk. Finn i dette tilfellet eksplisitte uttrykk for følgende skalarprodukt mellom firervektorer.

Uttrykk svaret ved energien E til det innkommende elektronet og vinkelen ϑ mellom det innkommende elektronet og et av de produserte fotonene.

Vi velger koordinatsystem slik at

$$
\begin{aligned}
p_1 &= E\ (1,0,0,1)\,, \\
p_2 &= E\ (1,0,0,-1)\,, \\
k_1 &= E\ (1,\sin\vartheta,0,\cos\vartheta)\,, \\
k_2 &= E\ (1,-\sin\vartheta,0,-\cos\vartheta)\,,
\end{aligned}
$$

og finner

(i) $p_1 p_2 = 2E^2$,

(ii) $p_1 q = p_1^2 - p_1 k_1 = -E^2\,(1-\cos\vartheta)$,

(iii) $p_2 q = p_1 p_2 - p_2 k_1 = E^2\,(1-\cos\vartheta)$,

(iv) $p_1 q' = p_1^2 - p_1 k_2 = -E^2\,(1+\cos\vartheta)$,

(v) $p_2 q' = p_1 p_2 - p_2 k_2 = E^2\,(1+\cos\vartheta)$,

(vi) $q^2 = p_1^2 - 2p_1 k_1 = -2E^2\,(1-\cos\vartheta)$,

(vii) $q'^2 = p_1^2 - 2p_1 k_2 = -2E^2\,(1+\cos\vartheta)$,

(viii) $qq' = p_1^2 - p_1 k_2 - p_1 k_1 + k_1 k_2 = 0$.

f) Finn i grensetilfellet fra underpunkt **e**) eksplisitte uttrykk for alle sporene som inngår i $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ fra forrige punkt.

Vi setter $m_e = 0$ i alle sporuttrykk og finner

$$\begin{aligned}
T^{aa} &= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\,\gamma_\nu \not{q}\,\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{q}\,\gamma^\nu \not{p}_2\,\right] = 8(p_1 q)(p_2 q) - 4(p_1 p_2) q^2 = 8E^4\left(1-\cos^2\vartheta\right),\\
T^{ab} &= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\,\gamma_\nu \not{q}\,\gamma_\mu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{q}\,'\gamma^\mu \not{p}_2\,\right] = -8(p_1 p_2)(q q') = 0,\\
T^{ba} &= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\,\gamma_\mu \not{q}\,'\gamma_\nu \not{p}_1 \gamma^\mu \not{q}\,\gamma^\nu \not{p}_2\,\right] = -8(p_1 p_2)(q q') = 0,\\
T^{bb} &= \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\left[\,\gamma_\mu \not{q}\,'\gamma_\nu \not{p}_1 \gamma^\nu \not{q}\,'\gamma^\mu \not{p}_2\,\right] = 8(p_1 q')(p_2 q') - 4(p_1 p_2) q'^2 = 8E^4\left(1-\cos^2\vartheta\right).
\end{aligned}$$

g) Finn i grensetilfellet fra underpunkt **e**) eksplisitt uttrykk for det differensielle tverrsnittet $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\mathrm{ann}}$. Uttrykk svaret ved energien E og vinkelen ϑ.

Vi setter resultatene over inn i ligning (7) og får

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{4}\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2}\left|\mathcal{M}_{fi}^{(a)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)}\right|^2 = 2e^4\left(\frac{1+\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta} + \frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right).$$

Fra den oppgitte formelen i vedlegget følger det så at

$$\left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right)_{\mathrm{ann}} = \frac{1}{64\pi^2\,(2E)^2}\,\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{\alpha^2}{32}\left(\frac{\hbar c}{E}\right)^2\left(\frac{1+\cos\vartheta}{1-\cos\vartheta} + \frac{1-\cos\vartheta}{1+\cos\vartheta}\right). \tag{8}$$

Her har vi i siste likhet satt inn $\hbar$ og c slik at uttrykket blir dimensjonsmessig korrekt i SI-enheter.

Oppgave 3. Klein-Gordon felt i et konformt flatt rom

Dynamikken til et komplekst Klein-Gordon felt $\varphi(x)$ i et krumt (men konformt flatt) rom er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{\lambda(x)}\left[\partial_\mu\varphi^*\,\partial^\mu\varphi - m^2\,\varphi^*\varphi\right], \tag{9}$$

der funksjonen $\lambda(x)$ antas å være kjent på forhånd. Vi bruker enheter der $\hbar = c = 1$.

a) Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene Π_φ og Π_{φ^*} til feltene φ og φ^*?

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi} = \mathrm{e}^{\lambda(x)}\dot\varphi^*, \quad \Pi_{\varphi^*} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\varphi^*} = \mathrm{e}^{\lambda(x)}\dot\varphi. \tag{10}$$

b) Hva blir Hamiltontettheten $\mathcal{H}$?

$$\mathcal{H} = \Pi_\varphi\,\dot\varphi + \Pi_{\varphi^*}\,\dot\varphi^* - \mathcal{L} = \mathrm{e}^{-\lambda(x)}\,\Pi_{\varphi^*}\,\Pi_\varphi + \mathrm{e}^{\lambda(x)}\,\left(\nabla\varphi^*\nabla\varphi + m^2\,\varphi^*\varphi\right). \tag{11}$$

c) Hva blir bevegelsesligningene (Euler-Lagrange ligningene) for φ og φ^*?

Fra henholdsvis $\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi^*} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi^*}$ og $\partial_\mu\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\partial_\mu\varphi} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}$ finner vi etter divisjon med $\mathrm{e}^{\lambda(x)}$

$$\mathrm{e}^{-\lambda(x)}\partial_\mu\,\mathrm{e}^{\lambda(x)}\partial^\mu\,\varphi(x) + m^2\varphi(x) = 0, \quad \mathrm{e}^{-\lambda(x)}\partial_\mu\,\mathrm{e}^{\lambda(x)}\partial^\mu\,\varphi^*(x) + m^2\,\varphi^*(x) = 0. \tag{12}$$

d) Vis at man ved å innføre feltet $\psi(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda(x)}\varphi(x)$ kan transformere bevegelsesligningen til en Klein-Gordon ligning med et x-avhengig masseledd $M^2(x)$.

Vi setter inn $\phi(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda(x)}\psi(x)$ i ligning (12) og finner

$$\partial_\mu \mathrm{e}^{\lambda}\partial^\mu \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\lambda}\psi = \partial_\mu \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda}\left(\partial^\mu\psi - \frac{1}{2}(\partial^\mu\lambda)\psi\right)$$
$$= \mathrm{e}^{\frac{1}{2}\lambda(x)}\left[\Box\psi - \frac{1}{2}(\Box\lambda)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu\lambda)(\partial^\mu\lambda)\psi\right].$$

Altså får vi

$$\Box\psi(x) + M^2(x)\psi(x) = 0, \quad \text{der } M^2(x) = m^2 - \frac{1}{2}\Box\lambda - \frac{1}{4}(\partial_\mu\lambda)(\partial^\mu\lambda). \tag{13}$$

e) Vi antar nå at $\lambda(x) = 2at$ (i et gitt koordinatsystem), og kvantiserer denne feltteorien. Hva blir i dette tilfellet utviklingen av det annenkvantiserte feltet $\psi(x)$, uttrykt ved kreasjons- og annihilasjons-operatorer? Du kan anta et endelig volum med periodiske grensebetingelser.

Med $\lambda(x) = 2at$ vil $\psi(x)$ tilfredsstille en vanlig Klein-Gordon ligning med konstant masseparameter $M^2 = m^2 - a^2$. Vi kan da forvente at ψ, $\psi^\dagger$ vil ha en vanlig utvikling i kreasjons og annihilasjonsoperatorer

$$\psi(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}V}}\left[a(\boldsymbol{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + b^\dagger(\boldsymbol{p})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right], \tag{14}$$

$$\psi^\dagger(x) = \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}V}}\left[b(\boldsymbol{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + a^\dagger(\boldsymbol{p})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}\right], \tag{15}$$

der $\omega_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2}$ og $px = \omega_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}$, og der $a^\dagger(\boldsymbol{p})$, $b^\dagger(\boldsymbol{p})$, $a(\boldsymbol{p})$ og $b(\boldsymbol{p})$ oppfyller de vanlige kommuteringsreglene for kreasjons- og annihilasjons-operatorer. Vi vet fra kvantisering av det vanlige komplekse Klein-Gordon feltet at denne ekspansjonen løser feltligningen og oppfyller de vanlige til *lik-tid* kommuteringsreglene

$$\left[\dot\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})\right] = \left[\dot\psi(t,\boldsymbol{x}), \psi^\dagger(t,\boldsymbol{y})\right] = -\mathrm{i}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

med alle andre *lik-tid* kommutatorer mellom feltene og deres tidsderiverte lik null.

Kommentar: Merk at det oppstår en ustabilitet, $M^2 < 0$, hvis geometrien endrer seg for raskt, dvs. hvis $a^2 > m^2$.

Kommentar til de pedantiske: Selvfølgelig skal man også kontrollere hva som er de korrekte kanoniske konjugerte feltene til ψ og $\psi^\dagger$. For dette må vi starte med Lagrangetettheten uttrykte ved ψ og $\psi^\dagger$,

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \mathrm{e}^{2at}(\partial_\mu \mathrm{e}^{-at}\psi^*)\,(\partial^\mu \mathrm{e}^{-at}\psi) - m^2\psi^*\,\psi \\ &= (\dot\psi^* - a\psi^*)(\dot\psi - a\psi) - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi - m^2\psi^*\,\psi.\end{aligned}$$

Denne Lagrangetettheten avviker bare med en totalderivert, $\Delta\mathcal{L} = -a\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\,\psi$, fra den vanlige Lagrangetettheten for Klein-Gordon feltet. De to teoriene må derfor være ekvivalente. Dette kan vi også sjekke eksplisitt. De kanonisk konjugerte feltene blir

$$\Pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = \dot\psi^* - a\psi^*, \quad \Pi_{\psi^*} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi^*} = \dot\psi - a\psi.$$

Fra dette kan vi verifisere at ekspansjonene (14, 15) oppfyller de riktige *lik-tid* kommuteringsreglene. F. eks. har vi

$$[\Pi_\psi(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})] = \left[\dot\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})\right] - a\left[\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})\right] = -\mathrm{i}\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{16}$$

siden $\left[\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})\right] = 0$.