NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i
FY3404/FY8307 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Fredag 9. juni 2006

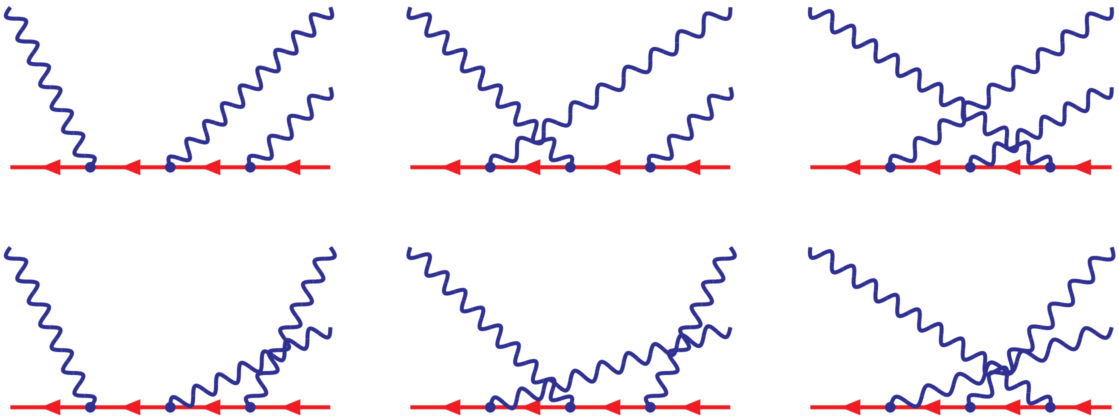
Dette løsningsforslaget er på 4 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfelle dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a) $e^+\gamma \to e^+\gamma$

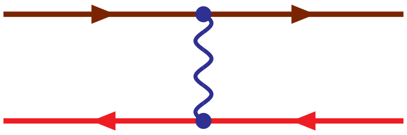
b) $e^+\gamma \to e^+\gamma\gamma$



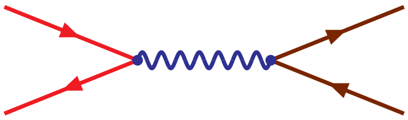
c) $e^+\mu^- \to e^-\mu^+$

Denne prosessen bryter bevaring av elektrontall og myontall, og er derfor umulig i *QED*.

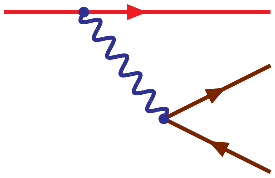
d) $e^+\mu^- \rightarrow e^+\mu^-$



e) $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu-$

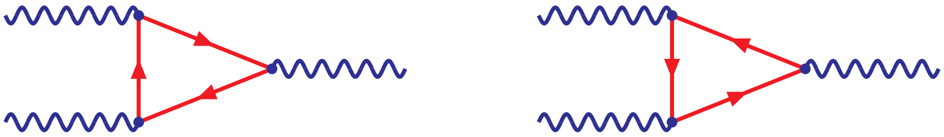


f) $e^- \rightarrow e^-\mu^+\mu-$



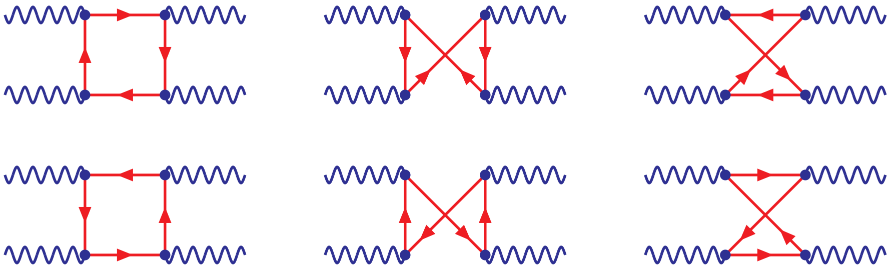
Likevel en umulig prosess pga konservering av firer-impuls.

g) $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$



Men bidragene fra disse to amplitudene kansellerer eksakt i *QED* (Furry's teorem) som en konsekvens av invarians under ladningskonjugasjon. Uansett ville prosessen vært umulig pga konservering av firer-impuls.

h) $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$



i) $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

Her er der $4! = 24$ diagrammer som parvis kansellerer hverandre eksakt i *QED* (Furrys teorem) som en konsekvens av invarians under ladningskonjugasjon.

Oppgave 2. Möllerspredning

I denne oppgaven skal du se på noen aspekter ved Møllerspredning, $e^- e^- \to e^- e^-$.

a) Tegne alle Feynman diagrammene til laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Skriv ned alle nødvendige firerimpulser og indekser på diagrammene.

Anta at elektronene i starttilstanden har kvantetall p_i, s_i, $i = 1, 2$, og at elektronene i sluttilstanden har kvantetall p'_f, s'_f, $f = 1, 2$. Innfør videre $q = p_1 - p'_1$ og $q' = p_1 - p'_2$.

b) Bruk Feynmanreglene i vedlegget til å skrive ned det tilhørende algebraiske uttrykket for spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.

c) For å beregne det upolariserte spredningstverrsnittet trenger vi den kvadrerte amplituden $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$, midlet over spinnene til elektronene i starttilstanden og summert over spinnene til elektronene i sluttilstanden,

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} \equiv \frac{1}{4} \sum_{\{s_i, s'_f\}} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}^*_{fi}. \tag{1}$$

Dette uttrykket kan bli skrevet som en sum som involverer spor over γ-matriser. Vis a et ledd i denne summen har formen

$$\mathcal{F}(q) \times \mathrm{Tr}\ \left\{\gamma^\mu \left(\not{p}_1 + m_e\right) \gamma^\nu \ \left(\not{p}'_1 + m_e\right)\right\}\ \mathrm{Tr}\ \left\{\gamma_\mu \left(\not{p}_2 + m_e\right) \gamma_\nu \left(\not{p}'_2 + m_e\right)\right\}, \tag{2}$$

og bestem funksjonen $\mathcal{F}(q)$.

d) Regn ut produktet av sporene over

$$Q \equiv \mathrm{Tr}\ \left\{\gamma^\mu \left(\not{p}_1 + m_e\right) \gamma^\nu \ \left(\not{p}'_1 + m_e\right)\right\}\ \mathrm{Tr}\ \left\{\gamma_\mu \left(\not{p}_2 + m_e\right) \gamma_\nu \left(\not{p}'_2 + m_e\right)\right\}. \tag{3}$$

Uttrykk svaret ved skalarprodukter av firerimpulsene som inngår.

Oppgave 3. Klein-Gordon felt i et konformt flatt rom

Dynamikken til et komplekst Klein-Gordon felt $\varphi(x)$ i et krumt (men konformt flatt) rom er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \mathrm{e}^{\lambda(x)} \left[\partial_\mu \varphi^* \, \partial^\mu \varphi - m^2 \, \varphi^* \varphi\right], \tag{4}$$

der funksjonen $\lambda(x)$ antas å være kjent på forhånd. Vi bruker enheter der $\hbar = c = 1$.

a) Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene Π_φ og Π_{φ^*} til feltene φ og φ^*?

$$\Pi_\varphi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = \mathrm{e}^{\lambda(x)} \dot{\varphi}^*, \quad \Pi_{\varphi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}^*} = \mathrm{e}^{\lambda(x)} \dot{\varphi}. \tag{5}$$

b) Hva blir Hamiltontettheten $\mathcal{H}$?

$$\mathcal{H} = \Pi_\varphi \, \dot{\varphi} + \Pi_{\varphi^*} \, \dot{\varphi}^* - \mathcal{L} = \mathrm{e}^{-\lambda(x)} \, \Pi_{\varphi^*} \, \Pi_\varphi + \mathrm{e}^{\lambda(x)} \, \left(\nabla \varphi^* \nabla \varphi + m^2 \, \varphi^* \varphi\right). \tag{6}$$

c) Hva blir bevegelsesligningene (Euler-Lagrange ligningene) for φ og φ^*?

Fra henholdsvis $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi^*} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^*}$ og $\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \varphi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}$ finner vi etter divisjon med $\mathrm{e}^{\lambda(x)}$

$$\mathrm{e}^{-\lambda(x)} \partial_\mu \, \mathrm{e}^{\lambda(x)} \partial^\mu \, \varphi(x) + m^2 \varphi(x) = 0, \quad \mathrm{e}^{-\lambda(x)} \partial_\mu \, \mathrm{e}^{\lambda(x)} \partial^\mu \, \varphi^*(x) + m^2 \, \varphi^*(x) = 0. \tag{7}$$

d) Vis at man ved å innføre feltet $\psi(x) = e^{\frac{1}{2}\lambda(x)}\varphi(x)$ kan transformere bevegelsesligningen til en Klein-Gordon ligning med et x-avhengig masseledd $M^2(x)$.

Vi setter inn $\phi(x) = e^{-\frac{1}{2}\lambda(x)}\psi(x)$ i ligning (7) og finner

$$
\begin{aligned}
\partial_\mu e^{\lambda}\partial^\mu e^{-\frac{1}{2}\lambda}\psi &= \partial_\mu e^{\frac{1}{2}\lambda}\left(\partial^\mu\psi - \frac{1}{2}(\partial^\mu\lambda)\psi\right) \\
&= e^{\frac{1}{2}\lambda(x)}\left[\Box\psi - \frac{1}{2}(\Box\lambda)\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu\lambda)(\partial^\mu\lambda)\psi\right].
\end{aligned}
$$

Altså får vi

$$\Box\psi(x) + M^2(x)\psi(x) = 0, \quad \text{der } M^2(x) = m^2 - \frac{1}{2}\Box\lambda - \frac{1}{4}(\partial_\mu\lambda)(\partial^\mu\lambda). \tag{8}$$

e) Vi antar nå at $\lambda(x) = 2\mu t$ (i et gitt koordinatsystem), og kvantiserer denne feltteorien. Hva blir i dette tilfellet utviklingen av det annenkvantiserte feltet $\psi(x)$, uttrykt ved kreasjons- og annihilasjons-operatorer? Du kan anta et endelig volum med periodiske grensebetingelser.

Med $\lambda(x) = 2at$ vil $\psi(x)$ tilfredsstille en vanlig Klein-Gordon ligning med konstant masseparameter $M^2 = m^2 - a^2$. Vi kan da forvente at ψ, $\psi^\dagger$ vil ha en vanlig utvikling i kreasjons og annihilasjonsoperatorer

$$
\begin{aligned}
\psi(x) &= \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}V}}\left[a(\boldsymbol{p})\,e^{-ipx} + b^\dagger(\boldsymbol{p})\,e^{ipx}\right], && (9)\\
\psi^\dagger(x) &= \sum_{\boldsymbol{p}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_{\boldsymbol{p}}V}}\left[b(\boldsymbol{p})\,e^{-ipx} + a^\dagger(\boldsymbol{p})\,e^{ipx}\right], && (10)
\end{aligned}
$$

der $\omega_{\boldsymbol{p}} = \sqrt{\boldsymbol{p}^2 + M^2}$ og $px = \omega_{\boldsymbol{p}}t - \boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{x}$, og der $a^\dagger(\boldsymbol{p})$, $b^\dagger(\boldsymbol{p})$, $a(\boldsymbol{p})$ og $b(\boldsymbol{p})$ oppfyller de vanlige kommuteringsreglene for kreasjons- og annihilasjons-operatorer. Vi vet fra kvantisering av det vanlige komplekse Klein-Gordon feltet at denne ekspansjonen løser feltligningen og oppfyller de vanlige til *lik-tid* kommuteringsreglene

$$\left[\dot\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})\right] = \left[\dot\psi(t,\boldsymbol{x}), \psi^\dagger(t,\boldsymbol{y})\right] = -i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}),$$

med alle andre *lik-tid* kommutatorer mellom feltene og deres tidsderiverte lik null.

Kommentar: Merk at det oppstår en ustabilitet, $M^2 < 0$, hvis geometrien endrer seg for raskt, dvs. hvis $a^2 > m^2$.

Kommentar til de pedantiske: Selvfølgelig skal man også kontrollere hva som er de korrekte kanoniske konjugerte feltene til ψ og $\psi^\dagger$. For dette må vi starte med Lagrangetettheten uttrykte ved ψ og $\psi^\dagger$,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L} &= e^{2at}(\partial_\mu e^{-at}\psi^*)(\partial^\mu e^{-at}\psi) - m^2\psi^*\psi \\
&= (\dot\psi^* - a\psi^*)(\dot\psi - a\psi) - \boldsymbol{\nabla}\psi^*\cdot\boldsymbol{\nabla}\psi - m^2\psi^*\psi.
\end{aligned}
$$

Denne Lagrangetettheten avviker bare med en totalderivert, $\Delta\mathcal{L} = -a\frac{\partial}{\partial t}\psi^*\psi$, fra den vanlige Lagrangetettheten for Klein-Gordon feltet. De to teoriene må derfor være ekvivalente. Dette kan vi også sjekke eksplisitt. De kanonisk konjugerte feltene blir

$$\Pi_\psi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi} = \dot\psi^* - a\psi^*, \quad \Pi_{\psi^*} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot\psi^*} = \dot\psi - a\psi.$$

Fra dette kan vi verifisere at ekspansjonene (9, 10) oppfyller de riktige *lik-tid* kommuteringsreglene. F. eks. har vi

$$[\Pi_\psi(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})] = \left[\dot\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})\right] - a\left[\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})\right] = -i\delta^{(3)}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}), \tag{11}$$

siden $\left[\psi^\dagger(t,\boldsymbol{x}), \psi(t,\boldsymbol{y})\right] = 0$.

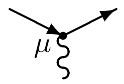
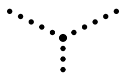
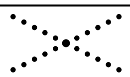
1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_f p'_f\,)\prod_{f=1}^{n}\frac{d^3p'_f}{(2\pi)^3\,2E'_f} \tag{12}$$

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2\,(p_1+p_2)^2}\,\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2\;d\Omega \qquad \text{for } n=2 \text{ i massesenter systemet} \tag{13}$$

2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!\longrightarrow$ p, s	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	p, s $\longrightarrow\!\!\bullet$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\!\longleftarrow$ p, s	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	p, s $\longleftarrow\!\!\bullet$	$\overline{v}(p,s)$
γ (foton)	$\bullet\!\sim\!\sim\!\sim$ k, r	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	k, r $\sim\!\sim\!\sim\!\bullet$	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\cdots$ k	1	Uladet spinn–0	k $\cdots\cdots\bullet$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{\text{int}}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\bullet\!\!\xrightarrow{p}\!\!\bullet$	$\dfrac{i(\not{p}+m)}{p^2-m^2+i\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$\mu\ \bullet\!\overset{k}{\sim\!\sim\!\sim}\!\bullet\ \nu$	$\dfrac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2+i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\overset{k}{\cdots}\cdots\bullet$	$\dfrac{i}{k^2-m^2+i\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{14}$$

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e_\nu^*(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{15}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{18}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\,\not{p} = p^2 \tag{19}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\gamma^\mu = -2\,\not{p} \tag{20}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{21}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\gamma^\mu = -2\not{r}\,\not{q}\,\not{p} \tag{22}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{23}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{24}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q} = 4\,(pq) \tag{25}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{26}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{27}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$