NTNU
Fakultet for Naturvitenskap og Teknologi
Institutt for Fysikk

Eksamen i FY3452 Gravitasjon og Kosmologi

Faglærar: Professor Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU
Tlf: 73593131

Tirsdag 3. juni 2008
kl. 09.00-13.00

Tilletne hjelpemiddel:
Godkjend lommekalkulator
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Rottmann: Matematische Formelsammlung
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

I alle oppgavene bruker vi einheiter slik at $c = G = 1$. Metrikken er diag(-1,1,1,1). Oppgavesettet er på fire sider. Les oppgaveteksten nøye. Lykke til.

Oppgave 1

I denne oppgava skal vi studere ei roterande skive med radius R og som roterer med vinkelhastigheit ω. Labsystemet er eit inertialsystem. Det er hendig å innføre polarkoordinatar $\hat{r}$ og $\hat{\theta}$. Det roterande referansesystemet er eit akselerert referansesystem. Det er det hendig å innføre polarkoordinatar r og θ. Metrikken i det roterande referansesystemet er

$$ds^2 = -(1-\omega^2 r^2)dt^2 + dr^2 + 2r^2\omega\, dt\, d\theta + r^2 d\theta^2 \, .$$

a) Ein observatør i $r = R$ roterer rundt med skiva. Kva er eigentida $\Delta\tau$ for ein rotasjon? Uttrykk svaret ved R og ω.

b) γ_{ij} er komponentane til den romlege metriske tensoren og definert ved

$$\gamma_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{it}g_{jt}}{g_{tt}} ,$$

der $i, j = 1, 2$. Den romlege metrikken kan da skrivast som

$$d\Sigma^2 = \gamma_{ij}dx^i dx^j .$$

Vis at den romlege metrikken er

$$d\Sigma^2 = dr^2 + \frac{r^2}{1 - \omega^2 r^2} d\theta^2 .$$

Rekn ut arealet av den roterande skiva. Er den romlege geometrien euklidsk? Grunngje svaret.

c) I $r = R$ er det ei ljoskjelde som er i ro i det roterande referansesystemet. Ljoskjelda sender ut ljossignal med frekvens ω_R. Rekn ut frekvensen ω_0 som blir målt av ein observatør som mottek signalet i origo. Kva er tolkninga av denne raudforskyvninga til ein stasjonær observatør i $r = 0$, det vil seie ein observatør som er i ro i origo i det roterande referansesystemet? Kva er tolkninga av denne raudforskyvninga til ein stasjonær observatør i $\hat{r} = 0$, det vil seie ein observatør som er i ro i origo i det labsystemet.

Oppgave 2

Metrikken til eit homogent og isotropt univers er

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[d\chi^2 + \left\{\begin{array}{l} \sin^2\chi \\ \chi^2 \\ \sinh^2\chi \end{array}\right\}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] , \quad \left\{\begin{array}{l} k = 1 \\ k = 0 \\ k = -1 \end{array}\right\} ,$$

der k er den romlege krumninga. Friedmans likningar med ein kosmologisk konstant Λ for eit homogent og isotropt univers er

$$3\frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi\rho + \Lambda ,$$
$$-2\frac{\ddot{a}}{a} - \frac{\dot{a}^2 + k}{a^2} = 8\pi p - \Lambda .$$

a) Kva er $a(t)$, ρ, og p? Gjer kort greie for den romlege geometrien i dei tre tilfella.

b) I resten av oppgava skal vi studere spesialtilfellet der $p = 0$ og $k = 1$. Vis at det finst ein kritisk verdi ρ_m for tettheiten slik at a er tidsuavhengig. Uttrykk a og ρ_m ved hjelp av Λ.

c) Vi skal nå perturbere dette statiske universet. Vi skriv difor

$$\rho \quad = \quad \rho_m + \delta\rho \; ,$$

Med denne perturbasjonen blir a tidsavhengig. Er universet stabilt med omsyn på denne perturbasjonen? Grunngje svaret.

Oppgave 3

I denne oppgava skal vi studere eit tidrom med den kulesymmetriske metrikken

$$ds^2 \quad = \quad -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2 \; ,$$

der R er ein konstant.

a) To stasjonære observatørar, Jens og Kristin, har dei romlege koodinatane $r = R/2$, $\theta = 0$ og $\phi = 0$. Kristin er fornøgd med livet og blir værande i $r = R/2$, $\theta = 0$ og $\phi = 0$. Jens kjedar seg og vil utforske tidrommet litt. Han byrjar difor å gå utover i radiell retning. Etter ei stund passerer han flata $r = R$. Forklar kvifor Jens aldri kjem til å sjå Kristin igjen.

b) Vi innfører ein ny tidskoordinat v som er definert ved

$$t \quad = \quad v + \frac{1}{2} R \ln \left|1 + \frac{r}{R}\right| - \frac{1}{2} R \ln \left|1 - \frac{r}{R}\right| \; .$$

Uttrykk metrikken ved hjelp av koodinatane v, r, θ, og ϕ.

c) Ljoslike kurver tilfredsstiller likninga $ds^2 = 0$. Finn alle radielle ljoslike kurver. Skisser kurvene i eit $(\tilde{t}, r)$-diagram, der $\tilde{t} = v + r$.

Oppgave 4

Denne oppgava består av tre ulike spørsmål som ein kan svare på uavhengig av kvarandre.

a) La G vere i gruppe. Kva vil det seie at G er abelsk. Er $SO(3)$ ei abelsk gruppe? Grunngje svaret. Kor mange generatorar har gruppa $SU(2)$?

b) Lagrangetettheiten for eit relativistisk fermion er

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi .$$

m er massen til fermiona og γ^μ er fire 4×4 matriser. ψ er ein vektor med 4 komponentar og $\bar{\psi} = \psi^\dagger\gamma^0$, $\dagger$ tyder komplekskonjugering og transponering. Vis at $\mathcal{L}$ er invariant under ein *global* fasetransformasjon, det vil seie ein transformasjon på forma

$$\begin{aligned} \psi &\to e^{i\alpha}\psi , \\ \psi^\dagger &\to e^{-i\alpha}\psi^\dagger , \end{aligned}$$

der α er ein konstant. Finn den tilhøyrande 4-straumen j^μ. Kan du generalisere Lagrangefunksjonen ovanfor slik at den er invariant under *lokale* fasetransformasjonar?

Vi definerer i tillegg ei matrise γ^5 ved $\gamma^5 = \gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$. Matrisa γ^5 er reell. Matrisene γ^μ antikommuterer med γ^5:

$$\gamma^\mu\gamma^5 + \gamma^5\gamma^\mu = 0 .$$

Ein global kiral fasetransformasjon er definert ved

$$\begin{aligned} \psi &\to e^{i\gamma^5\alpha}\psi , \\ \psi^\dagger &\to \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5} , \end{aligned}$$

der α er ein konstant. For kva verdiar av m er $\mathcal{L}$ invariant under ein global kiral fasetransformasjon.

c) Vi ser på standardsituasjonen, der eit inertialsystem S' bevegar seg langs x-aksen med hastigheit v i forhold til inertialsystemet S. Skriv ned transformasjonsformlane mellom koordinatane x, y, z og t i S og koordinatane x', y', z', og t' i S'. La V_x vere x-komponenten til hastigheiten i S og $V^{x'}$ vere x'-komponenten til hastigheiten i S'. Utlei transformasjonsformelen mellom $V^{x'}$ og V^x.

Oppgitt:

Nöthers teorem:

$$\partial_\mu j^\mu = 0 .$$

der

$$j^\mu = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\Delta\phi\right] .$$