Løysingsframlegg Eksamen FY3452 Gravitasjon og Kosmologi Våren 2008

Jens O. Andersen
Institutt for Fysikk, NTNU

Oppgave 1

a) Hastigheiten til observatøren i labsystemet er

$$V = \omega R .$$

Labtida Δt for ein rotasjon er

$$\Delta t = \frac{2\pi}{\omega} .$$

Samanhengen mellom labtid og eigentid er som vanleg

$$\begin{aligned}
\Delta\tau &= \sqrt{1-V^2}\,\Delta t \\
&= \underline{\underline{\frac{2\pi}{\omega}\sqrt{1-\omega^2R^2}}} .
\end{aligned}$$

b) Vi har

$$\begin{aligned}
\gamma_{\theta\theta} &= g_{\theta\theta} - \frac{g_{t\theta}g_{t\theta}}{g_{tt}} \\
&= r^2 + \frac{r^4\omega^2}{1-\omega^2r^2} \\
&= \underline{\underline{\frac{r^2}{1-\omega^2r^2}}} .
\end{aligned}$$

Vidare er

$$\begin{aligned}
\gamma_{rr} &= g_{rr} - \frac{g_{tr}g_{tr}}{g_{tt}} \\
&= \underline{\underline{1}} . \\
\gamma_{\theta r} &= \gamma_{r\theta} \\
&= g_{\theta r} - \frac{g_{t\theta}g_{tr}}{g_{tt}} \\
&= \underline{\underline{0}} .
\end{aligned}$$

Innsett får ein då

$$d\Sigma^2 = \underline{\underline{dr^2 + \frac{r^2}{1-\omega^2r^2}d\theta^2}} .$$

Flateelementet er gitt ved

$$\begin{aligned} dA &= \sqrt{\gamma_{rr}\gamma_{\theta\theta}}\, dr d\theta \\ &= \frac{r\, dr d\theta}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}} \,. \end{aligned}$$

Arealet til skiva blir da

$$\begin{aligned} A &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r\, dr d\theta}{\sqrt{1-\omega^2 r^2}} \\ &= -\frac{2\pi}{\omega^2}\sqrt{1-\omega^2 r^2}\Big|_0^R \\ &= \underline{\underline{\frac{2\pi}{\omega^2}\left(1-\sqrt{1-\omega^2 R^2}\right)}} \,. \end{aligned}$$

Nei, geometriem er ikkje euklidsk. Arealet til skiva er ikkje lik πR^2 når $\omega \neq 0$. Dersom ein let $\omega \to 0$ i formelen ovanfor får ein sjølsagt $A = \pi R^2$.

c) I labsystemet har vi (transvers) Doppler effekt fordi kjelda bevegar seg i forhold til kvarandre. Samanhengen mellom ω_R og ω_0 er

$$\omega_0 = \frac{\omega_R\sqrt{1-V^2}}{1-V\cos\alpha} \,,$$

der $V =$ er hastigheiten til kjelda og α er vinkelen mellom retninga til fotonet og retninga til kjelda. I oppgava er $V = \omega R$ og $\alpha = \pi/2$. Dett gjev

$$\omega_0 = \underline{\underline{\sqrt{1-\omega^2 R^2}\omega_R}} \,.$$

Alternativ løysing: Metrikken er tidsuavhengig og $\xi = (1, 0, 0)$ er difor ein Killing vektor. Ein stasjonær observatør har 4-hastigheit $\mathbf{u}_{\text{obs}} = \left(1-\omega^2 r^2\right)^{-1/2} \xi$ Vi veit at

$$\mathbf{p}\cdot\xi = \text{konstant} \,,$$

langs verdslinja for eit foton. Vidare har vi at energien E til eit foton er gitt ved

$$\begin{aligned} E &= -\mathbf{p}\cdot\mathbf{u}_{\text{obs}} \\ &= \mathbf{p}\cdot\left(1-\omega^2 r^2\right)^{-1/2}\xi \\ &= \text{konstant}\left(1-\omega^2 r^2\right)^{-1/2} \,. \end{aligned}$$

Energien til fotonet er gitt ved $\hbar\omega(r)$, der argumentet indikerer at energien er ein funksjon av radien r. Dette gjev

$$\hbar\omega(r)\sqrt{1-\omega^2 r^2} = \text{konstant} \,.$$

Dersom ein evaluerer dette uttrykket for $r = 0$ og $r = R$, får vi

$$\underline{\underline{\omega_0 = \sqrt{1 - \omega^2 R^2}\, \omega_R}}\ .$$

Ein observatør i ro i labsystemet tolkar raudforskyvninga som *transvers Doppler effekt* i spesiell relativitetsteori. Iføgje ekvivalensprinsippet er akselerasjon det ekvivalent med gravitasjonsfelt. Ein observatør i ro i det akselererte referansessystemet vil difor tolke det som *gravitasjonell raudforskyvning.* Dei to observatørane er i same punkt, men refererer til ulike koordinatsystem og difor er tolkninga ulik.

Oppgave 2

a) $a(t)$ er skalafaktoren. Avstanden mellom to galaksar (som har konstante medfølgande koordinatar) er proporsjonal med $a(t)$. Λ er den kosmologiske konstanten, ρ er energitettheiten til stråling og materie. p er strålingstrykket (trykket til vanleg materie er tilnærma lik null). $k = 0$ tilsvarer topologien til euklidsk rom. $k = 1$ er topologien til ei tredimensjonal kule (S^3) i $\mathcal{R}^4$. $k = -1$ er topologien til ein tredimensjonal hyperboloide i eit firedimensjonalt flatt tidrom.

b) Vi prøver med $a =$ konst i den andre av Friedmans likningar. Dette gjev

$$\frac{1}{a^2} = \Lambda\,,$$

eller

$$a = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{\Lambda}}}}\ .$$

Den første av Friedmans likningar kan da skrivast

$$\rho_m = \frac{1}{8\pi}\left[3\frac{1}{a^2} - \Lambda\right]\ .$$

Ved innsetting for a får vi

$$\rho_M = \underline{\underline{\frac{\Lambda}{4\pi}}}\ .$$

c) Kombinasjon av Friedmans likningar gjev

$$\begin{aligned} -6\frac{\ddot{a}}{a} &= 8\pi\rho - 2\Lambda \\ &= 8\pi\delta\rho\ . \end{aligned}$$

Vi skriv

$$a = \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} + \delta a\ ,$$

der δa er avviket frå $1/\sqrt{\Lambda}$. Tidsderivasjon ein og to gangar gjev

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \delta\dot{a} \, , \\ \ddot{a} &= \delta\ddot{a} \, . \end{aligned}$$

Til første orden får vi

$$\delta\ddot{a} = \underline{\underline{-\frac{4\pi}{3\sqrt{\Lambda}}\delta\rho}} \, .$$

Viss $\delta\rho > 0$, vil a minke og vice versa. Altså er universet ustabilt.

Oppgave 3

a) r er ein romlik koordinat for $r < R$ og ein tidlik koordinat for $r > R$. t er ein romlik koordinat for $r > R$ og ein tidlik koordinat for $r < R$. Dette tyder at t og r byttar rolle. For $r < R$ aukar t. Dersom Jens passerer $r = R$, må r anten auke eller minke sidan r er ein tidlik koordinat. Kontinuitet impliserer at r må auke og Jens kan aldri vende tilbake til $r = R/2$. Dette er analogt til det som skjer dersom ein passerer Schwarschildradien $r = 2m$ til eit svart hol.

b) Differensialet blir

$$dt = dv + \frac{dr}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)} \, .$$

Innsett i metrikken, får vi

$$ds^2 = \underline{\underline{-\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dv^2 - 2dvdr + r^2 d\Omega^2}} \, .$$

c) $ds^2 = 0$ gjev fleire løysingar. Ei løysing er

$$dv = 0 \, .$$

Dette tilsvarer

$$v = \underline{\underline{\text{konstant}}} \, .$$

Dette svarer til rette linjer: $\tilde{t} = v + r = C + r$. Den andre løysinga er gitt ved

$$\frac{dv}{dr} = -\frac{2}{1 - \frac{r^2}{R^2}} \, .$$

Integrasjon gjev da

$$v = -R \ln\left|1 + \frac{r}{R}\right| + R \ln\left|1 - \frac{r}{R}\right| + C \, , \qquad (1)$$

der C er ein integrasjonskonstant.

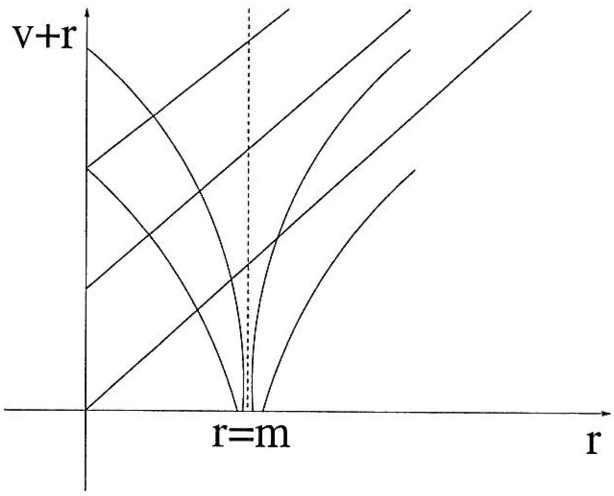

FIG. 1: Skisse av dei ljoslike kurvene.

Oppgave 4

a) Ei gruppe er abelsk viss alle element i gruppa kommuterer, $ab = ba$ for alle $a, b \in G$. $SO(3)$ er gruppa av rotasjonar i tre dimensjonar. Det er opplagt at to rotasjonar om to ulike aksar ikkje alltid kommuterer. Altså er $SO(3)$ ikkje abelsk. $SU(2)$ har tre generatorar - Pauli-matrisene.

b) Sidan α er ein konstant, kommuterer fasefaktoren med derivasjonsoperatoren og γ-matrisen. Fasefaktoren $e^{i\alpha}$ frå ψ kansellerer da fasefaktoren $e^{-i\alpha}$ frå $\psi^\dagger$. Altså er det første leddet invariant. Tilsvarande for det andre leddet. Rekkeutvikling av global fasetransformasjon til første orden i α gjev

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= i\alpha\psi \\ \Delta\psi^\dagger &= -i\alpha\psi^\dagger\,.\end{aligned}$$

I tillegg har vi

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)} = \bar{\psi}\gamma^\mu\,.$$

Firerstraumen blir da

$$j^\mu = \underline{\underline{\bar{\psi}\gamma^\mu\psi}}\,,$$

der vi har droppa prefaktoren $i\alpha$.

For at Lagrangefunksjonen skal vere invariant under lokale fasetransformasjonar, må vi innføre eit gaugefelt A_μ og erstatte partielt deriverte med kovariant deriverte. I tillegg må vi ta med eit Maxwell-ledd for A_μ. Vi får da

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu - iA_\mu\psi) - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} ,$$

der $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ er den elektromagnetiske felttensoren.

Sidan γ_5 antikommuterer med γ_μ, får vi $e^{i\alpha\gamma^5}\gamma_\mu = \gamma_\mu e^{-i\alpha\gamma^5}$. Dette gjev

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\to \mathcal{L}' \\ &= \psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma_0\gamma^\mu\partial_\mu e^{i\gamma^5\alpha}\psi - m\psi^\dagger e^{-i\alpha\gamma^5}\gamma_0 e^{i\gamma^5\alpha}\psi . \\ &= \bar{\psi}\gamma^\mu(\partial_\mu\psi) - m\bar{\psi}e^{-2i\alpha\gamma^5}\psi .\end{aligned}$$

Det er altså berre for $m = 0$ at $\mathcal{L}$ er invariant.

c) Transformasjonsformlane er

$$\begin{aligned}t' &= \gamma(t - vx) , \\ x' &= \gamma(x - vt) , \\ y' &= y , \\ z' &= z ,\end{aligned}$$

der $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2}$. Dette gjev

$$\begin{aligned}dx' &= \gamma(dx - vdt) , \\ dt' &= \gamma(dt - vdx) .\end{aligned}$$

Ved divisjon får vi

$$\begin{aligned}V^{x'} &= \frac{dx'}{dt'} \\ &= \frac{dx - vdt}{dt - vdx} \\ &= \underline{\underline{\frac{V^x - v}{1 - vV^x}}} .\end{aligned}$$

Dersom $V^x = 1$, er $V^{x'} = 1$.