NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 45 43 71 70

Eksamen i FY3452 GRAVITASJON OG KOSMOLOGI

Lørdag 19. mai 2012
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**
Standard kalkulator (ifølge NTNU's liste).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*

There is also an english version of this exam set.

Dette oppgavesettet er på 2 sider.

Oppgave 1. Bevegelse i et ekspanderende univers

Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metrikken kan for $k = 0$ uttrykkes ved linje-elementet

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right), \tag{1}$$

når vi bruker enheter der lyshastigheten $c = 1$. Geodetisk bevegelse kan generelt utledes fra Lagrangefunksjonen

$$L = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \tag{2}$$

der startbetingelsene må oppfylle betingelsen $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1$ for massive partikler, og $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$ for masseløse partikler (lys). Her betyr $\dot{}$ derivasjon med hensyn til egentid τ.

a) Hvilke antagelser ligger bak utledningen av linje-elementet (1), og det mer generelle linje-elementet der $k \neq 0$?

b) Finn Euler-Lagrange ligningene for bevegelse i Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker-geometrien når $k = 0$.

c) De geodetiske ligningene kan generelt skrives på formen

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0. \tag{3}$$

Bruk resultatene fra forrige punkt til å finne konneksjonskoeffisentene $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$.

d) Lagrange-funksjonen er i dette tilfellet invariant under transformasjonen $x^i \to x^i + \epsilon$ for $x^i = x, y, z$. Bruk Nöthers teorem til å finne de tilhørende konserverte størrelsene. Vis at resultatet er konsistent med de geodetiske ligningene du har funnet.

e) Lagrange-funksjonen er invariant under transformasjonen $\tau \to \tau + \epsilon$. Hva er den tilhörende konserverte störrelsen (som kan utledes ved bruk av Nöthers teorem)?

f) Bruk resultatene over til å finne $\frac{dx^i}{dt}$ uttrykt ved startverdien ved $t = t_0$, og funksjonen a.

Oppgave 2. Friedmann-ligningene med konsekvenser

Friedmann's to ligninger for universets dynamikk kan (i enheter der $c = 1$) formuleres som

$$G^0_0 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G_N\, \varepsilon, \tag{4}$$

$$-G^1_1 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{2a''}{a} = 8\pi G_N\, p, \tag{5}$$

der $'$ betyr derivasjon med hensyn på kosmisk tid t, og G_N er Newtons konstant. Vi har antatt en energy-impuls tensor av formen

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \tag{6}$$

a) Konsistens av Einstein-ligningene $G^\mu{}_\nu = 8\pi G_N\, T^\mu{}_\nu$ setter generelt en betingelse på energi-impuls tensoren $T^\mu{}_\nu$. Hvilken betingelse er det?

b) I denne oppgaven skal du utlede denne betingelsen ved direkte manipulasjon av ligningene (4) og (5): Deriver ligning (4) med hensyn på t, og bruk deretter ligning (4) og (5) til å eliminere alle ledd som involverer $\frac{a''}{a}$ og $\frac{k}{a^2}$ fra resultatet.

c) Vis at uttrykket fra forrige punkt kan skrives på formen

$$\frac{d}{dt}\varepsilon a^3 + p\frac{d}{dt}a^3 = 0. \tag{7}$$

Hva er den fysiske tolkningen av denne ligningen?

d) Anta tilstandsligningen $p = w\varepsilon$, der w er en konstant. Vis at ligning (7) da kan brukes til å finne en sammenheng mellom $\varepsilon(t)/\varepsilon(t_0)$ og $a(t)/a(t_0)$. Gi denne sammenhengen.

e) Bruk sammenhengen du fant i forrige punkt til å erstatte høyresiden av ligning (4), slik at du får en ligning der $a(t)$ er den eneste tidsavhengige størrelsen som inngår.

f) Sett tilslutt $k = 0$ og finn den eksplisitte løsningen av ligningen du fant i forrige punkt. Se spesielt på tilfellene $w = \frac{1}{3}$, $w = 0$, og $w = -1$.

Oppgave 3. Noen astronomiske fakta

a) Hva er avstanden fra jorda til sola?

b) Hva er jordas hastighet rundt sola?

c) Hva er avstanden fra Jupiter til sola?

d) Hva er solas radius?

e) Hvor er massesenteret til solsystemet?

f) Hva er den *astronomiske enheten* (a.u)?

g) Hvor langt er et *lysår*?

h) Hvor langt er et *parsec*?

i) Hva er avstanden til vår nærmeste (nest etter sola) stjerne?

j) Hva er avstanden fra sola til sentrum av vår galakse?

k) Hva er størrelsen på vår galakse?

l) Hva er avstanden til vår nærmeste spiralgalakse?

m) Hva er universets alder?

Some expressions which *may* be of use

Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}. \tag{8}$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \to \varphi_a + \varepsilon\, \delta\varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \varepsilon\, \partial_\mu \Lambda^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta\varphi_a - \Lambda^\mu. \tag{9}$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

NTNU **Institutt for fysikk**

Contact during the exam:
Professor Kåre Olaussen
Telephone: 45 43 71 70

Exam in FY3452 GRAVITATION AND COSMOLOGY

Saturday May 19, 2012
09:00–13:00

Allowed help: Alternativ **C**
Standard calculator (according to list by NTNU).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (all language editions).
Barnett & Cronin: *Mathematical Formulae*

Det finnes også en norsk versjon av dette eksamenssettet.

This problemset consists of 3 pages.

Problem 1. Motion in an expanding universe

The Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker metric can for $k = 0$ be expressed by the line element

$$\mathrm{d}s^2 = -\mathrm{d}t^2 + a(t)^2 \left(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2\right), \tag{1}$$

when we use units where the speed of light $c = 1$. Geodetic motion can in general be derived from the Lagrange function

$$L = -\frac{1}{2} g_{\mu\nu}(x)\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \tag{2}$$

where the initial conditions must satisfy the condition $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 1$ for massive particles, and $g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu = 0$ for massless particles (light). Here $\dot{}$ means differensiation with respect to egentime τ.

a) Which assumptions are behind the derivation of the line element (1), and the more general line element where $k \neq 0$?

b) Find the Euler-Lagrange equations for motion in the Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker geometry when $k = 0$.

c) The geodetic equation can in general be written in the form

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}\dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0. \tag{3}$$

Use the results of the previous point to find the connection coefficients $\Gamma^\mu{}_{\nu\lambda}$.

d) The Lagrange function is in this case invariant under the transformation $x^i \to x^i + \epsilon$ for $x^i = x, y, z$. Use the Nöther theorem to find the corresponding conserved quantities. Show that the result is consistent with the geodetic equations you have found.

e) The Lagrange function is invariant under the transformation $\tau \to \tau + \epsilon$. What is the corresponding conserved quantity (which can be derived by use of the Nöther theorem)?

f) Use the results above to find $\frac{dx^i}{dt}$ expressed by the starting values at $t = t_0$, and the function a.

Problem 2. The Friedmann equations and consequences

The two Friedmann equations describing the dynamics of the universe can (in units where $c = 1$) be formulated as

$$G^0_0 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3} G_N\, \varepsilon, \tag{4}$$

$$-G^1_1 = \left(\frac{a'}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} + \frac{2a''}{a} = 8\pi G_N\, p, \tag{5}$$

where $'$ means differentiation with respect to cosmic time t, and G_N is Newton's constant. We have assumed an energy-momentum tensor of the form

$$T^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \tag{6}$$

a) Consistency of the Einstein equations $G^\mu{}_\nu = 8\pi G_N\, T^\mu{}_\nu$ in general impose a condition on the energy momentum tensor $T^\mu{}_\nu$. Which condition is it?

b) In this problem you shall derive the condition by direct manipulation of equations (4) and (5): Differentiate equation (4) with respect to t, and next use equations (4) and (5) to eliminate all terms which involve $\frac{a''}{a}$ and $\frac{k}{a^2}$ from the result.

c) Show that the expression from the previous point can be written on the form

$$\frac{d}{dt}\varepsilon a^3 + p\frac{d}{dt}a^3 = 0. \tag{7}$$

What is the physical interpretation of this equation?

d) Assume the equation of state $p = w\varepsilon$, where w is a constant. Show that we then may use (7) to find a connection between $\varepsilon(t)/\varepsilon(t_0)$ and $a(t)/a(t_0)$. Give this connection.

e) Use the connection you found in the previous point to replace the right hand side of equation (4), to obtain an equation where $a(t)$ is the only time dependent quantity.

f) Finally set $k = 0$ and find the explicit solution of the equation you found in the previous point. Consider in particular the cases $w = \frac{1}{3}$, $w = 0$, and $w = -1$.

Problem 3. Some astronomical facts

a) What is the distance from the earth to the Sun?

b) What is the speed of the earth around the Sun?

c) What is the distance from Jupiter to the Sun?

d) What is the radius of the Sun?

e) Where is the center-of-mass of the solar system?

f) What is the *astronomical unit* (a.u)?

g) How long is a *lightyear*?

h) How long is a *parsec*?

i) What is the distance to the closest (next to the sun) star?

j) What is the distance from the sun to the center of our galaxy?

k) What is the size of our galaxy?

l) What is the distance to the nearest spiral galaxy?

m) What is the age of the universe?

Some expressions which *may* be of use

Euler-Lagrange equations

The Euler-Lagrange equations for a field theory described by the Lagrangian $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a, x)$ are

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a}. \tag{8}$$

The corresponding equations for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.

Nöther's theorem

Assume the action is invariant under the continuous transformations $\varphi_a \to \varphi_a + \varepsilon\, \delta\varphi_a + \mathcal{O}(\varepsilon^2)$, more precisely that $\mathcal{L} \to \mathcal{L} + \varepsilon\, \partial_\mu \Lambda^\mu + \mathcal{O}(\epsilon^2)$ under this transformation. Then there is an associated conserved current,

$$J^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \varphi_a)} \delta\varphi_a - \Lambda^\mu. \tag{9}$$

I.e., $\partial_\mu J^\mu = 0$. The corresponding expression for point particle mechanics is obtained by restricting ∂_μ to only a time derivative $\mathrm{d}/\mathrm{d}t$.