NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i FY3403 PARTIKKELFYSIKK

Torsdag 31. mai 2007

Dette løsningsforslaget er på 7 sider.

Oppgave 1. Kvarkmodell for $q\bar{q}$-mesoner

Gi en beskrivelse av hvordan man i kvarkmodellen tenker seg at mesoner er bygd opp av en u eller d kvark og en $\bar{u}$ eller $\bar{d}$ antikvark. Prøv spesielt å forklare

a) hvilket spinn S det kombinerte $q\bar{q}$-systemet kan ha,

Ifølge vektormodellen for kobling av spinn har vi at

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1, \tag{1}$$

dvs at det kombinerte systemet kan ha spinn $S = 0$ (singlett) eller $S = 1$ (triplett). Målt i enheter der $\hbar = 1$.

b) hvilket isospinn I det kombinerte $q\bar{q}$-systemet kan ha,

Siden spinn og isospinn er matematisk ekvivalent har vi fortsatt

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1, \tag{2}$$

dvs at det kombinerte systemet kan ha isospinn $I = 0$ (isosinglett) eller $I = 1$ (isotriplett).

c) hvilken relativ banedreieimpuls L det kombinerte $q\bar{q}$-systemet kan ha,

Banedreieimpulsen er kvantisert i heltallige enheter av $\hbar$,

$$L = 0, 1, \dots \tag{3}$$

d) hvilken total dreieimpuls J det kombinerte $q\bar{q}$-systemet kan ha,

$$J = (L + S), (L + S - 1), \dots, |L - S \tag{4}$$

e) hvilken spektroskopisk notasjon man bruker for å betegne $q\bar{q}$-systemer som over,

$$^{2S+1}X_J \tag{5}$$

der $X = S$ for $L = 0$, $X = P$ for $L = 1$, $X = D$ for $L = 2$ osv.

f) kvalitativt hvordan massen til mesonet avhenger av de forskjellige kvantetallene (illustrer helst med et diagram),

Må lage figur

g) hvordan pariteten P til mesonet avhenger av de forskjellige kvantetallene,

$$P = (-1)^{L+1} \tag{6}$$

fordi q og $\bar{q}$ har motsatt intrinsikk paritet.

h) hvordan C-pariteten til de nøytrale mesonene avhenger av de forskjellige kvantetallene,

$$C = (-1)^{L+S} \tag{7}$$

må huskes.(Eller kan finnes fra oppgave 2!)

i) hvordan G-pariteten til mesonet avhenger av de forskjellige kvantetallene,

$$G = (-1)^{I}\, C \tag{8}$$

må huskes.(Eller kan finnes fra oppgave 2!)

j) hvilke mer kvantitative matematiske modeller man kan bruke for å beregne massen (og andre fysiske egenskaper) til mesonet.

Ikkerelativistisk kvarkmodell,

$$M \approx m_q + m_{\bar{q}} + \frac{A}{m_q\, m_{\bar{q}}}\, \boldsymbol{s}_q \cdot \boldsymbol{s}_{\bar{q}} \tag{9}$$

Bagmodell
Bethe-Salpeter integralligning
...

Oppgave 2. Henfall av mesoner lagd av lette (anti-)kvarker, dvs. $\boldsymbol{u}, \bar{\boldsymbol{u}}, \boldsymbol{d}, \bar{\boldsymbol{d}}$

Ifølge *Review of Particle Physics* har ρ-mesonene ($^3S_1$-tilstander med $I = 1$) masse $m = 771$ MeV/c^2 og vidde $\Gamma = 149$ MeV/c^2, mens de tilsvarende ω-mesonene ($^3S_1$-tilstander med $I = 0$) masse $m = 782$ MeV/c^2 og vidde $\Gamma = 8.44$ MeV/c^2.

a) Hvorfor er ω-mesonene så mye mer stabile enn ρ-mesonene?

Moden $\rho \to \pi\pi$ er mulig ved sterke vekselvirkninger ($G = +1$ for ρ, $G = (-1)^2 = 1$ for $\pi\,\pi$), $\omega \to \pi\,\pi$ bryter G-paritet (siden ω har $G = -1$) og kan derfor ikke gå ved sterke vekselvirkninger.

I *Review of Particle Physics* finner vi a_2-mesonene ($^3P_2$-tilstander med $I = 1$) listet med masse $m = 1318$ MeV/c^2 og vidde $\Gamma = 107$ MeV/c^2.

b) Forklar hvorfor henfallsmoden $a_2 \to \pi\pi$ ikke er observert

a_2 har $G = -1$ så $a_2 \to \pi\pi$ kan ikke gå ved sterke vekselvirkninger. Prosessen kan gå ved elektromagnetiske vekselvirkninger, men slike henfall blir maskert av mye mer dominerende prosesser som f.eks $a_2 \to \rho\,\pi$.

c) Henfallsmoden $a_2 \to \pi\pi\pi$ er heller ikke observert. Hva tror du kan være grunnen til dette?

Siden $a_2 \to \rho\,\pi$ er observert, og $\rho \to \pi\,\pi$ også går, er prosessen altså mulig.

Men $a_2 \to \pi\,\pi\,\pi$ direkte har ikke vært observert. Mulige årsaker: (i) Vesentlig mindre amplitude for 3-partikkel henfall (sammenlignet med sterkt 2-partikkel henfall), og (ii) mange av henfallskanalene for $a_2 \to \pi\,\pi\,\pi$ er umulig uten paritetsbrudd.

Oppgitt: Ifølge *Review of Particle Physics* finner vi følgende kvantetall tilordnet endel mesoner:

$\boldsymbol{\pi^0(135)}$	$I^G(J^{PC}) = 1^-(0^{-+})$
$\boldsymbol{\pi^\pm(140)}$	$I^G(J^{PC}) = 1^-(0^-)$
$\boldsymbol{\eta(547)}$	$I^G(J^{PC}) = 0^+(0^{-+})$
$\boldsymbol{\rho(770)}$	$I^G(J^{PC}) = 1^+(1^{--})$
$\boldsymbol{\omega(782)}$	$I^G(J^{PC}) = 0^-(1^{--})$
$\boldsymbol{a_2(1318)}$	$I^G(J^{PC}) = 1^-(2^{++})$

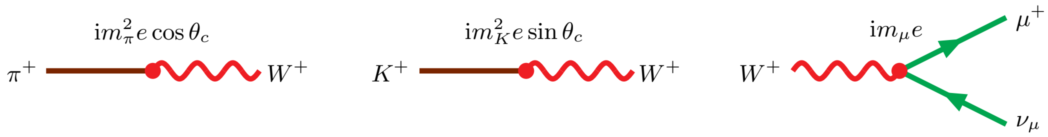
Vi har følgende sammenhenger: $P = (-1)^{L+1}$, $C = (-1)^{L+S}$, $G = (-1)^I C$.

Oppgave 3. Kvantitativ modell for henfall av pseudoskalare mesoner

Som en sterkt forenklet (og derfor unøyaktig) modell for henfall av ladete π-mesoner og K-mesoner, f.eks

$$\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu, \qquad K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu,$$

antar vi at disse mesonene kan konvertere til et virtuelt W^+ vektormeson, som igjen kan konvertere til $\mu^+ + \nu_\mu$ som indikert av Feynmanreglene nedenfor.

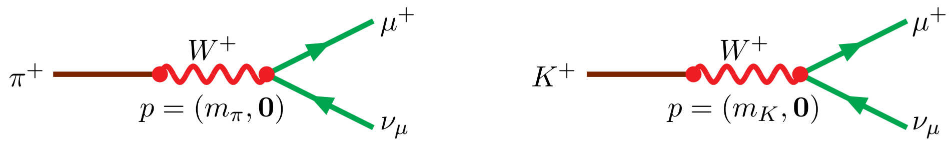


Propagatoren for et virtuelt W-vektormeson med firerimpuls p settes til

$$\frac{\mathrm{i}}{p^2 - m_W^2}$$

I naturlige enheter har vi $m_\mu \approx 105.7$ MeV, $m_\pi \approx 140$ MeV, $m_K \approx 495$ MeV, $m_W \approx 80.4$ GeV, $\alpha = e^2/4\pi \approx 1/137.04$.

a) Tegn Feynman diagrammene for henfallsprosessene $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$ og $K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$.



b) Skriv ned de tilhørende algebraiske uttrykk for henfallsamplitudene $\mathcal{M}_{\rm fi}$ i de to tilfellene.

$$\mathcal{M}_{\rm fi}(\pi^+ \to \mu^+\nu_\mu) = -\mathrm{i}\,\frac{e^2 m_\pi^2 m_\mu \cos\theta_c}{m_\pi^2 - m_W^2} \approx \mathrm{i}\,e^2\cos\theta_c\,\frac{m_\pi^2 m_\mu}{m_W^2} \qquad (10)$$

$$\mathcal{M}_{\rm fi}(K^+ \to \mu^+\nu_\mu) = -\mathrm{i}\,\frac{e^2 m_K^2 m_\mu \sin\theta_c}{m_K^2 - m_W^2} \approx \mathrm{i}\,e^2\sin\theta_c\,\frac{m_K^2 m_\mu}{m_W^2} \qquad (11)$$

c) Anta at mesonet er i ro før henfallet. Hva blir energien E_μ til myonet i de to tilfellene?

La m_m bety enten m_π eller m_K. Vi bruker naturlige enheter. Vi må ha $E_\mu + E_\nu = m_\mathrm{m}$. Siden $|\boldsymbol{p}_\mu| = |\boldsymbol{p}_\nu|$ og $m_\nu = 0$ finner vi at $E_\nu = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2}$. Altså at $\sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} = m_\mathrm{m} - E_\mu$. Kvadrert, og løst ut for E_μ gir dette

$$E_\mu = \frac{m_\mathrm{m}^2 + m_\mu^2}{2m_\mathrm{m}} = \begin{cases} 109.9 \text{ MeV} & \text{når m er } \pi^+, \\ 258.8 \text{ MeV} & \text{når m er } K^+. \end{cases} \tag{12}$$

d) Det er eksperimentelt kjent at

$$\frac{\Gamma(K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)} \approx \frac{4}{3}. \tag{13}$$

Velg θ_c slik at denne relasjonen er oppfylt.

Her trenger vi bevegelsesmengden til myonet etter henfall av partikkel m. Fra ligning (12) finner vi at

$$|\boldsymbol{p}_\mathrm{m}| = \sqrt{E_\mu^2 - m_\mu^2} = \frac{1}{2m_\mathrm{m}} \sqrt{(m_\mathrm{m}^2 + m_\mu^2)^2 - 4m_\mathrm{m}^2 m_\mu^2} = \frac{m_\mathrm{m}^2 - m_\mu^2}{2m_\mathrm{m}} \tag{14}$$

Fra dette følger det at

$$\frac{\Gamma(K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)}{\Gamma(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)} = \frac{m_\pi^2}{m_K^2} \frac{(m_K^2 - m_\mu^2)/m_K}{(m_\pi^2 - m_\mu^2)/m_\pi} \frac{m_K^4 \sin^2\theta_c}{m_\pi^4 \cos^2\theta_c},$$

dvs. at vi må ha

$$\tan^2\theta_c = \frac{4}{3} \frac{m_\pi}{m_K} \frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{m_K^2 - m_\mu^2} = 0.0136,$$

eller

$$\theta_c = 0.116 \equiv 6.7^\circ. \tag{15}$$

Kommentar: Den eksperimentelle verdien på Cabibbo-vinkelen er $\theta_C = 0.229 = 13.1^\circ$.

e) Hva blir da henfallsratene, $\Gamma(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)$ og $\Gamma(K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu)$?

Ved innsetting av tallverdier finner man

$$\begin{aligned} \Gamma(\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu) &= e^4 \cos^2\theta_c \frac{m_\pi^4 m_\mu^2}{m_W^2} \frac{1}{8\pi m_\pi^2} \left(\frac{m_\pi^2 - m_\mu^2}{2m_\pi} \right) \\ &= \pi\alpha^2 \cos^2\theta_c \frac{m_\pi m_\mu^2 \left(m_\pi^2 - m_\mu^2\right)}{m_W^4} \\ &= 3.71 \cdot 10^{-16}\, m_\pi = 5.21 \cdot 10^{-14} \text{ MeV}, \end{aligned} \tag{16}$$

og

$$\begin{aligned} \Gamma(K^+ \to \mu^+ + \nu_\mu) &= e^4 \sin^2\theta_c \frac{m_K^4 m_\mu^2}{m_W^2} \frac{1}{8\pi m_K^2} \left(\frac{m_K^2 - m_\mu^2}{2m_K} \right) \\ &= \pi\alpha^2 \sin^2\theta_c \frac{m_K m_\mu^2 \left(m_K^2 - m_\mu^2\right)}{m_W^4} \\ &= 1.40 \cdot 10^{-16}\, m_K = 6.94 \cdot 10^{-14} \text{ MeV}. \end{aligned} \tag{17}$$

f) Bestem levetidene τ_π og τ_K til henholdsvis π^+ og K^+ i denne modellen, under antagelse om at de oppgitte henfallsmodene er de eneste som forekommer. Oppgi svaret i SI-enheter, dvs. sekunder. (Hvis du ikke har fått til forrige punkt, forklar med eksempel hvordan du konverterer fra en henfallsrate Γ gitt i naturlige enheter til en levetid τ gitt i sekunder.)

$$\tau_\pi = \frac{\hbar}{\Gamma_\pi} = 1.26 \cdot 10^{-8} \text{ s} \tag{18}$$

$$\tau_K = \frac{\hbar}{\Gamma_K} = 0.95 \cdot 10^{-8} \text{ s} \tag{19}$$

Kommentar: De eksperimentelle levetidene er $\tau_\pi = 2.60 \cdot 10^{-8}$ s, og $\tau_K = 1.24 \cdot 10^{-8}$ s, så denne *grovt tiløksede* modellen fungerer egentlig mye bedre enn den fortjener!

g) Forklar hvordan du vil generalisere denne modellen til å beskrive henfall av D_s^+-mesoner, dvs. $D_s^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$.

Oppgitt:
a) Sammenhengen mellom amplitude $\mathcal{M}_{\rm fi}$ og henfallsrate er i dette tilfellet (med to partikler i sluttilstanden), i naturlige enheter,

$$\Gamma = \frac{|\boldsymbol{p}|}{8\pi m^2}|\mathcal{M}_{\rm fi}|^2, \tag{20}$$

der m er massen til partikkelen (i ro) som henfaller, og $|\boldsymbol{p}|$ er bevegelsesmengden til en av partiklene i sluttilstanden.
b) $\hbar = 1.0546 \times 10^{-34}$ Js $= 6.5822 \times 10^{-22}$ MeVs, $c = 2.9979 \times 10^8$ m/s.

Oppgave 4. e^+e^-–produksjon pga. vekselvirkning med den kosmiske bakgrunnsstrålingen

Det er velkjent at universet er fyllt med termiske fotoner med en temperatur $T \approx 2.7$ K. Denne kosmiske bakgrunnstrålingen er essensielt isotrop i vårt Lorentz referansesystem. Dette betyr at andre fotoner med *veldig* høy energi ikke kan propagere over store avstander i universet. De vil istedet kollidere med fotoner fra bakgrunnstrålingen og skape elektron-positron par.

a) Anslå hvilken energi, $\hbar\omega$, et foton må ha for å danne et elektron-positron par ved en "head-on" kollisjon med et foton fra bakgrunnsstrålingen (målt i vårt Lorentz referansesystem).

Oppgitt: Boltzmann's konstant $k_B \approx 8.6 \times 10^{-5}$ eV/K, $m_e = 0.511$ MeV/c^2.

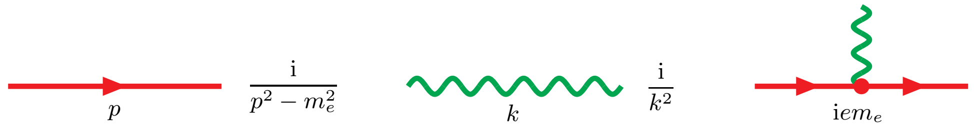
Vi regner først med naturlige enheter, $\hbar = c = 1$. Når vårt foton, med firervektor $q = (\omega, 0, 0, \omega)$, kolliderer med et foton fra bakgrunnsstrålingen med firervektor $q_B = (\omega_B, 0, 0, -\omega_B)$ blir det invariante massekvadratet

$$s = (q + q_B)^2 = (\omega + \omega_B)^2 - (\omega - \omega_B)^2 = 4\omega\omega_B. \tag{21}$$

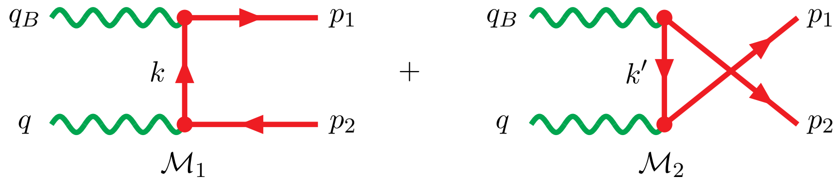
Dette må være minst like stort som det invariante massekvadratet for et elektron-positron par uten relativ hastighet (i ro i massesentersystemet), dvs. $s \geq (2m_e)^2$. Med $\hbar$ og c gjeninnsatt

$$\hbar\omega \geq \frac{m_e^2 c^4}{\hbar\omega_B} \approx \frac{m_e^2 c^4}{k_B T} = \frac{(0.511 \times 10^6 \text{ eV})^2}{2.7 \times 8.6 \times 10^{-5} \text{ eV}} \approx 1.12 \times 10^{15} \text{ eV}. \tag{22}$$

b) Som en svært forenklet modell for parproduksjonsprosessen behandler vi fotonet som en masseløs nøytral skalar partikkel, og elektronet som en ladet skalar partikkel med masse m_e. Propagatorene for elektronet og fotonet, og vekselvirkningsknuten mellom dem, er som gitt av Feynman reglene nedenfor.



Tegn Feynman diagrammene for parproduksjonsprosessen.



Her er $k = q - p_2 = p_1 - q_B$ og $k' = q_B - p_2 = p_1 - q$.

c) Finn i denne forenklede modellen det algebraiske uttrykket for spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$. Du kan bruke *naturlige enheter*, dvs. enheter der $\hbar = c = 1$.

Vi har $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2$, med

$$\mathcal{M}_1 = \frac{\mathrm{i}\,(\mathrm{i}em_e)^2}{k^2 - m_e^2} \quad \text{og} \quad \mathcal{M}_2 = \frac{\mathrm{i}\,(\mathrm{i}em_e)^2}{k'^2 - m_e^2}. \tag{23}$$

d) Finn i denne modellen det differensielle tverrsnittet for parproduksjon i massesentersystemet.

I massesentersystemet kan vi skrive $q = (E, 0, 0, E)$, $q_B = (E, 0, 0, E)$, $p_1 = (E, \boldsymbol{p})$ og $p_2 = (E, -\boldsymbol{p})$, der $\boldsymbol{p} = \sqrt{E^2 - m_e^2}\,\hat{p}$ med $\hat{p}$ retningen på det skapte elektronet. Dette gir

$$\begin{aligned} k^2 - m_e^2 &= (q - p_2)^2 - m_e^2 = q^2 + p_2^2 - m_e^2 - 2p_2 q = -2p_2 q \\ &= -2E^2\,(1 + \beta_e \cos\vartheta) \qquad (24) \\ k'^2 - m_e^2 &= (q - p_1)^2 - m_e^2 = -2p_1 q \\ &= -2E^2\,(1 - \beta_e \cos\vartheta)\,. \qquad (25) \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $q^2 = 0$, $p_1^2 = p_2^2 = m_e^2$ og innført $\beta_e^2 = \boldsymbol{p}^2/E^2$. Når vi videre setter $S = 1$ (elektronet og positronet er ikke identiske partikler), $E_1 + E_2 = 2E$ og $|\boldsymbol{p}_f|/|\boldsymbol{p}_i| = \beta_e$ i den generelle formelen (31), får vi

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{e^4}{1024\pi^2}\frac{m_e^4\,\beta_e}{E^6}\left(\frac{1}{1 - \beta_e\cos\vartheta} + \frac{1}{1 + \beta_e\cos\vartheta}\right)^2 = \frac{\alpha^2}{16}\frac{m_e^4}{E^6}\frac{\beta_e}{(1 - \beta_e^2\cos^2\vartheta)^2}. \tag{26}$$

e) Finn i denne modellen det totale tverrsnittet for parproduksjon. Ved integrasjon finner vi det totale tverrsnittet til

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{tot}} &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_{-1}^{1} \mathrm{d}\cos\vartheta \left(\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega}\right) = \frac{\pi\alpha^2 m_e^4 \beta_e}{8E^6}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x \frac{1}{(1 - \beta_e^2 x^2)^2} \\ &= \frac{\pi\alpha^2 m_e^2 \beta_e}{8E^4}\left\{1 + \frac{1 - \beta_e^2}{2\beta_e}\log\left(\frac{1 + \beta_e}{1 - \beta_e}\right)\right\}. \qquad (27) \end{aligned}$$

Her har vi brukt at $m_e^2/(1 - \beta_e^2) = E^2$.

f) Skisser hvordan du vil gå fram for å transformere det differensielle tverrsnittet for parproduksjon til vårt Lorentz referansesystem.

En måte å angripe dette problemet på er å gå via de relativistiske invariantene. Generelt (sålenge de to fotonene beveger seg kolineært) har vi at $s = (q + q_B)^2 = 4\omega\omega_B$, dvs. at vi kan skrive $2\omega = \xi\sqrt{s}$ og $2\omega_B = \xi^{-1}\sqrt{s}$, der $\omega/\omega_B = \xi^2$ (veldig stor i vårt referansesystem). Men, siden $p_2 = q + q_B - p_1$, finner vi at $p_2^2 = p_1^2 - 2p_1(q + q_B) + (q + q_B)^2$. Siden $p_1^2 = p_2^2$ gir dette

$$s = 2p_1(q + q_B) = \left(\xi + \xi^{-1}\right)\sqrt{s}E_\xi - (\xi - \xi^{-1})\sqrt{s}p_\xi \cos\vartheta_\xi. \tag{28}$$

Tilsvarende finner vi at $t \equiv (q - p_1^2) = m_e^2 - 2p_1 q = m_e^2 + \xi\sqrt{s}\,E_\xi - \xi\sqrt{s}\,p_\xi\cos\vartheta_\xi$. Vi kan skrive disse relasjonene på matriseform

$$\sqrt{s}\begin{pmatrix} \xi + \xi^{-1} & -\xi + \xi^{-1} \\ \xi & -\xi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_\xi \\ p_\xi\cos\vartheta_\xi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s \\ t - m_e^2 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Dette kan inverteres

$$\begin{pmatrix} E_\xi \\ p_\xi\cos\vartheta_\xi \end{pmatrix} = \frac{1}{2\sqrt{s}}\begin{pmatrix} \xi & -\xi + \xi^{-1} \\ \xi & -\xi - \xi^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} s \\ t - m_e^2 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

Her er altså E_ξ energien til elektronet i referansesystemet definert ved parameteren ξ, $p_\xi = \sqrt{E_\xi^2 - m_e^2}$, og ϑ_ξ er den tilhørende spredningsvinkelen. Ligning (30) gir en eksplisitt transformasjon mellom størrelsene i massesentersystemet og et generelt system.

Oppgitt:

Sammenhengen mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og spredningstverrsnitt er

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{S}{64\pi^2}\frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{(E_1 + E_2)^2}\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}. \tag{31}$$

Følgende integral kan være nyttig

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\,\frac{1}{(1 - u^2x^2)^2} = \frac{1}{1 - u^2} + \frac{1}{2u}\log\left(\frac{1+u}{1-u}\right) \quad \text{når } -1 < u < 1.$$