NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52 eller 45 43 71 70

Eksamen i FY8307 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Torsdag 1. desember 2005
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*

Sensur legges ut på fagets webside, `http://web.phys.ntnu.no/~kolausen/FY8307/`, såsnart den er klar

Dette oppgavesettet er på 2 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1. Forenklet Higgsmodell

I denne oppgaven skal du analysere modellen definert ved Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \kappa^2 \left(D_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right)^* \left(D^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}\right), \tag{1}$$

der $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}A_\mu$, og $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$. Her er e^2 og κ^2 konstanter, mens A^μ og ϕ er de dynamiske feltene. Vi bruker naturlige enheter, $\hbar = c = 1$.

a) Lagrangetettheten (1) er invariant under *globale* fasetransformasjoner, $\phi \to \phi + \alpha$, der α er konstant. Hva blir den tilhørende konserverte Nöther-strømmen?

b) Vis at Lagrangetettheten (1) er invariant under *lokale* fasetransformasjoner, $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha(x)$, hvis man gjør en tilhørende transformasjon av A^μ-feltet. Skriv ned denne transformasjonen.

c) Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene Π_ϕ og Π_μ til henholdsvis feltene ϕ og A^μ?

d) Finn Euler-Lagrange ligningene for A^μ og ϕ.

e) Vis at man kan gjøre en gauge-transformasjon slik at ϕ-feltet elimineres fullstendig fra Lagrangetettheten (1). Vis at bevegelsesligningen for A^μ i dette tilfellet kan reduseres til Klein-Gordon ligningen,

$$\left(\Box + M^2\right) A^\mu = 0, \tag{2}$$

og finn M^2 uttrykt ved parametrene i Lagrangetettheten.

f) Vi antar nå at Lagrangetettheten (1) definerer en modell i D rom-tid dimensjoner, slik at virkningen $S = \int \mathrm{d}^D x\, \mathcal{L}$ er dimensjonsløs. Hvilke massedimensjoner har da feltene A_μ og ϕ? Og parametrene e^2 og κ^2?

g) Anta nå at $D = 2$, dvs at $x = (t, z)$. Finn i dette tilfellet Fourier-utviklingen av feltet $A^\mu(x)$, uttrykt ved bl.a. kreasjons- og annihilasjons-operatorer og polarisasjonsvektorer ($a^\dagger(k)$, $a(k)$, $e^\mu(k)$).

Oppgave 2. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a) $\mu^- \to e^- e^- e^+$

b) $\mu^- \to \mu^- e^- e^+$

c) $\mu^- e^+ \to \mu^- e^+$

d) $\mu^- e^+ \to \mu^+ e^-$

e) $\mu^- \mu^+ \to e^+ e^-$

f) $\mu^+ \mu^- \to \gamma$

g) $\mu^+ \mu^- \to e^+ e^- \gamma$

h) $\mu^+ \gamma \to \mu^+ \gamma$

Oppgave 3. Compton spredning

I denne oppgaven skal du se litt på Compton-spredning, $e^- \gamma \to e^- \gamma$.

a) Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

Anta at det innkommende elektronet (resp. fotonet) har kvantetall p, s (resp. k, r), og at det utgående elektronet (resp. fotonet) har kvantetall p', s' (resp. k', r'). Innfør videre $q = p + k$ og $q' = p - k'$.

b) Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.

c) Anta at det innkommende elektronet er i ro, $p = (m_e, 0, 0, 0)$, og at $k = (\omega, 0, 0, \omega)$, $k' = (\omega', \omega'\,\hat{n})$. Bestem ω' som funksjon av ω og spredningsvinkelen ϑ ($\cos\vartheta = \hat{n} \cdot \hat{e}_z$).

d) Skriv ned uttrykket for amplitudekvadratet $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$, midlet over spinnet til det innkommende elektronet og summert over spinnet til det utgående elektronet.

e) For eksplisitt utregning av $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$ må man bl.a. beregne sporet

$$Y = \mathrm{Tr}\left\{ \not{e}' \not{k} \not{e} \left(\not{p} + m\right) \not{e} \not{k} \not{e}' \left(\not{p}' + m\right) \right\}, \tag{3}$$

når polarisasjonsvektorene e^μ, e'^μ for henholdsvis innkommende og utgående foton, er valgt reelle. Beregn Y. Du kan anta at $pe = pe' = ke = k'e' = 0$ (Coulomb gauge), og bruke at $e^2 = e'^2 = -1$ og $k^2 = k'^2 = 0$.

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2\, m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_f p'_f\,)\,\prod_{f=1}^{n}\,\frac{\mathrm{d}^3 p'_f}{(2\pi)^3\,2E'_f} \tag{4}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{64\pi^2\,(p_1+p_2)^2}\,\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2\;\mathrm{d}\Omega \qquad \text{for } n=2 \text{ i massesenter systemet} \tag{5}$$

2 Noen Feynmanregler for $-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\longrightarrow\ p, s$	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p, s\longrightarrow$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\longleftarrow\ p, s$	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p, s\longleftarrow$	$\overline{v}(p,s)$
γ (foton)	$\sim\sim\ k, r$	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	$k, r\sim\sim$	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	$\cdots\cdots k$	1	Uladet spinn–0	$k\ \cdots\cdots$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{\text{int}}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\overset{p}{\longrightarrow}$	$\dfrac{\mathrm{i}(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$	μ	$\mathrm{i}e\gamma^\mu$
γ (foton)	$\overset{k}{\mu\sim\sim\nu}$	$\dfrac{-\mathrm{i}\eta_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-\mathrm{i}\mu$
Uladet spinn–0	$\overset{k}{\cdots\cdots}$	$\dfrac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-\mathrm{i}\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{6}$$

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e^*_\nu(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{7}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{10}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\not{p} = p^2 \tag{11}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\gamma^\mu = -2\,\not{p} \tag{12}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{13}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\gamma^\mu = -2\not{r}\,\not{q}\,\not{p} \tag{14}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{15}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{16}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q} = 4\,(pq) \tag{17}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{18}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{19}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$