NTNU **Institutt for fysikk**

Midtsemesterprøve i FY8307/3404/TFY18 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Torsdag 13. oktober 2005
10:15–12:00

Tillatte hjelpemidler: Vanlig kalkulator
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* eller tilsvarende

Skriv *studentnummeret* ditt på hvert ark av oppgavesettet.

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1.
En fri feltteori er definert ved Lagrangetettheten

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_1\partial^\mu\varphi_1 + \frac{1}{2}\partial_\mu\varphi_2\partial^\mu\varphi_2 - \frac{1}{2}M^2\varphi_1\varphi_1 - \frac{1}{2}M^2\varphi_2\varphi_1 - \Delta^2\varphi_1\varphi_2 \\ &\quad -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m_f\right)\psi, \end{aligned} \tag{1}$$

der φ_1 og φ_2 er relle Klein-Gordon felter, $F^{\mu\nu} = \partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu$ er den elektromagnetiske felttensoren, og ψ er et Dirac-felt.
I denne modellen er de kanonisk konjugerte impulstettheten til feltene A^0 og A^i gitt som

A. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (\dot{A}^0, \dot{A}^i)$ ☐
B. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (-\dot{A}^0, \dot{A}^i)$ ☐
C. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (0, \dot{A}^i + \partial_i A^0)$ ☐
D. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (0, -\dot{A}^i)$ ☐
E. $(\Pi_{A^0}, \Pi_{A^i}) = (\dot{A}^0 + \partial_i A^i, -\dot{A}^0 - \partial_i A^0)$ ☐

Oppgave 2.
Bruk Lagrangetettheten (1) til å skrive ned bevegelsesligningene for φ_1 og φ_2.

Oppgave 3.
I modellen definert ved Lagrangetettheten (1) er det formelle uttrykket for vakuumforventningsverdien av energiimpulstensoren lik $\langle\,\Omega\,|\,T^{\mu\nu}\,|\Omega\rangle = \Lambda\,\eta^{\mu\nu}$, der

A. $\Lambda = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[2|p| + \sqrt{p^2+M^2-\Delta^2} + \sqrt{p^2+M^2+\Delta^2} - 4\sqrt{p^2+m_f^2}\right]$ ☐
B. $\Lambda = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[2|p| + 2\sqrt{p^2+M^2} + 2\sqrt{p^2+m_f^2}\right]$ ☐
C. $\Lambda = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[2|p| + 2\sqrt{p^2+M^2} + \sqrt{p^2+\Delta^2} - 4\sqrt{p^2+m_f^2}\right]$ ☐
D. $\Lambda = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[|p| + \sqrt{p^2+M^2+\Delta^2} + \sqrt{p^2+M^2-\Delta^2} + \sqrt{p^2+m_f^2}\right]$ ☐
E. $\Lambda = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[|p| + 2\sqrt{p^2+M^2} + \sqrt{p^2+\Delta^2} - \sqrt{p^2+m_f^2}\right]$ ☐

når vi bruker naturlige enheter.

Oppgave 4.
Basert på ren dimensjonsanalyse vil man (i naturlige) enheter anta at Λ er av størrelsesorden 500 TeV$^4 = 5 \cdot 10^{14}$ TeV^4. Omregnet til SI-enheter svarer dette til en massetetthet på

A. $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{14}$ kg/m^3 ☐
B. $\varepsilon \approx 10^{25}$ kg/m^3 ☐
C. $\varepsilon \approx 5 \cdot 10^{33}$ kg/m^3 ☐
D. $\varepsilon \approx 10^{30}$ kg/m^3 ☐
E. $\varepsilon \approx 10^{35}$ kg/m^3 ☐

Oppgitt: Lyshastigheten $c = 299\,792\,458$ m/s, Planck's konstant $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ kg m^2/s, positronladningen $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

Oppgave 5.
Anta at fermionfeltet i (1) kan utvikles i egenmoder som

$$\psi(x) = \sum_{\boldsymbol{p},r} c_r(\boldsymbol{p}) u_r(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + d_r^\dagger(\boldsymbol{p}) u_r(\boldsymbol{p}) \mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \tag{2}$$

$c_r(\boldsymbol{p})$, ($d_r^\dagger(\boldsymbol{p})$) er annihilasjonsopertorer (kreasjons-operatorer) for partiklene (antipartiklene) i modellen, og la $|\Omega\rangle$ være vakuumtilstanden for denne modellen. Marker hvilke av vakuumforventningsverdiene nedenfor som er null

A. $\langle\, \Omega \,|\, \psi(x)\, \psi(y) \,|\, \Omega \,\rangle$ ☐
B. $\langle\, \Omega \,|\, \psi(x)\, \bar{\psi}(y) \,|\, \Omega \,\rangle$ ☐
C. $\langle\, \Omega \,|\, \psi(x) c_r^\dagger(\boldsymbol{p}) \,|\, \Omega \,\rangle$ ☐
D. $\langle\, \Omega \,|\, c_r^\dagger(\boldsymbol{p}) \psi(x) \,|\, \Omega \,\rangle$ ☐
E. $\langle\, \Omega \,|\, \psi(x)^\dagger c_r^\dagger(\boldsymbol{p}) \,|\, \Omega \,\rangle$ ☐

Oppgave 6.
Diracligningen

$$\left[\mathrm{i}\left(\gamma^0 \partial_0 + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\nabla}\right) - m\right] \psi(x^0, \boldsymbol{x}) = 0$$

er invariant under rominversjon (paritets-transformasjon), $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$. Dvs. at hvis $\psi(x^0, \boldsymbol{x})$ løser Diracligningen så gjør også $\psi_P(x^0, \boldsymbol{x})$ det, når

A. $\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \psi(x^0, -\boldsymbol{x})$ ☐
B. $\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \gamma^0\, \psi(x^0, -\boldsymbol{x})$ ☐
C. $\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\gamma^2\, \psi^*(x^0, -\boldsymbol{x})$ ☐
D. $\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \gamma^1\, \gamma^3\, \psi^*(x^0, -\boldsymbol{x})$ ☐
E. $\psi_P(x^0, \boldsymbol{x}) = \psi^*(-x^0, -\boldsymbol{x})$ ☐

Oppgave 7.
Beregn sporet $T \equiv \mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda\right\}$.

Oppgave 8.
La $\mathcal{T}$ være tidsordningsoperatoren og $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ et kvantisert Diracfelt. Da gjelder (i naturlige enheter, dvs. når $\hbar = c = 1$)

A. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\}$ ☐
B. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} + \mathrm{i}S_F(x-y)$ ☐
C. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} - \mathrm{i}S_F(x-y)$ ☐
D. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = -\mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\}$ ☐
E. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = -\mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} - \mathrm{i}S_F(x-y)$ ☐

der $S_F(x-y)$ er Feynmans propagator for Dirac-partikler.

Oppgave 9.
Feynmans propagator for et reellt Klein-Gordon felt $\varphi(x)$ er definert ved ligningen

$$\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \langle\Omega|\mathcal{T}\left\{\varphi(x)\varphi(y)\right\}|\Omega\rangle.$$

For et fritt felt med masse M kan denne propagatoren representeres ved Fourier-integralet (i naturlige enheter)

A. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}\,\eta^{\mu\nu}}{p^2-M^2\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
B. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-M^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
C. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}}{p^2-M^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
D. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,(\not{p}+M)}{p^2-M^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
E. $\mathrm{i}\Delta_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\eta^{\mu\nu}}{p^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐

Oppgave 10.
La $\varphi_1(x)$ være feltet definert i Lagrangetettheten (1).
Finn uttrykket for $\langle\Omega|\mathcal{T}\left\{\varphi_1(x)\varphi_1(y)\right\}|\Omega\rangle$ i denne modellen.