NTNU **Institutt for fysikk**

Midtsemesterprøve i FY8307/3404/TFY18 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Torsdag 19. oktober 2006
10:15–12:00

Tillatte hjelpemidler: Vanlig kalkulator
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* eller tilsvarende

Skriv *studentnummeret* ditt på hvert ark av oppgavesettet.

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1.
En variant av fri elektrodynamikk er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2\right) + \theta \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} \tag{1}$$

der $\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{A}}$ og $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$.
I denne modellen er den kanonisk konjugerte impulstettheten til $\boldsymbol{A}$ gitt som

A. $\Pi_{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{A}}$ ☐
B. $\Pi_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E}$ ☐
C. $\Pi_{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{E} + \theta\,\boldsymbol{B}$ ☐
D. $\Pi_{\boldsymbol{A}} = -\boldsymbol{E} - \theta\,\boldsymbol{B}$ ☐
E. $\Pi_{\boldsymbol{A}} = \dot{\boldsymbol{A}} + \theta\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}$ ☐

Oppgave 2.
Bevegelsesligningen som kan utledes fra Lagrangetettheten (1) er

A. $\Box\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}\right) = 0$ ☐
B. $\Box\boldsymbol{A} + \theta\,\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ ☐
C. $\Box\boldsymbol{A} + \theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}\right) = 0$ ☐
D. $\Box\boldsymbol{A} = 0$ ☐
E. $\Box\boldsymbol{A} + \theta\left(\boldsymbol{E} - \boldsymbol{B}\right) = 0$ ☐

Oppgitt: $\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{X}\right) = \boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{X}\right) - \Delta\boldsymbol{X}$.

Oppgave 3.
Målt i naturlige enheter er positronets ladning omtrent lik

A. 1.6×10^{-19} ☐
B. 0.0073 ☐
C. 0.303 ☐
D. 0.085 ☐
E. -1.6×10^{-19} ☐

Oppgave 4.
Basert på ren dimensjonsanalyse ville man (i naturlige) enheter anslå at vakuumenergien er av størrelsesorden $\varepsilon \approx 1\ \text{TeV}^4 = \left(10^{12}\ \text{eV}\right)^4$. Omregnet til SI-enheter svarer dette til en massetetthet på

A. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{10}\ \text{kg/m}^3$ ☐
B. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{16}\ \text{kg/m}^3$ ☐
C. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{32}\ \text{kg/m}^3$ ☐
D. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{48}\ \text{kg/m}^3$ ☐
E. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{64}\ \text{kg/m}^3$ ☐

Oppgitt: Lyshastigheten $c = 299\,792\,458$ m/s, Planck's konstant $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ kg m^2/s, positronladningen $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

Oppgave 5.
Vi definerer matrisen $\gamma^5 = \mathrm{i}\gamma^0\,\gamma^1\,\gamma^2\,\gamma^3$. Da vil

A. γ^5 kommutere med alle matrisene γ^μ ☐
B. γ^5 kommutere med γ^0 og antikommutere med alle γ^i ☐
C. γ^5 antikommutere med alle matrisene γ^μ ☐
D. γ^5 antikommutere med γ^0 og kommutere med alle γ^i ☐
E. γ^5 kommutere med γ^0, γ^2 og antikommutere med γ^1, γ^3 ☐

Oppgave 6.
Feynmans propagator for Dirac-partikler er definert ved ligningen

$$\mathrm{i}S_F(x-y) = \langle\Omega|\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\}|\Omega\rangle.$$

der $\mathcal{T}$ er tidsordningsoperatoren. For Dirac-partikler med masse m kan denne propagatoren representeres ved Fourier-integralet (i naturlige enheter)

A. $\mathrm{i}S_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
B. $\mathrm{i}S_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
C. $\mathrm{i}S_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
D. $\mathrm{i}S_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,(\not{p}-m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
E. Ingen av alternativene over. ☐

Oppgave 7.

La $\mathcal{T}$ være tidsordningsoperatoren og $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ et kvantisert Diracfelt. Da gjelder (i naturlige enheter, dvs. når $\hbar = c = 1$)

A. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\}$ ☐

B. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} + \mathrm{i}S_F(x-y)$ ☐

C. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} - \mathrm{i}S_F(x-y)$ ☐

D. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = -\mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} - \mathrm{i}S_F(x-y)$ ☐

E. Ingen av alternativene over. ☐

Her er $S_F(x-y)$ er Feynmans propagator for Dirac-partikler.

Oppgave 8.

Gitt feltutviklingen for et fritt elektromagnetisk felt i Coulomb gauge,

$$\boldsymbol{A}(x) = \sum_{\boldsymbol{k},r} \frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|V}} \left(a_{\boldsymbol{k},r}\, \hat{e}_{\boldsymbol{k},r}\, \mathrm{e}^{-ikx} + \text{hermittisk konjugert} \right). \tag{2}$$

Da er matrise-elementet $\langle\Omega|\, a_{\boldsymbol{q},s}\, \boldsymbol{A}(x)\, |\Omega\rangle$ lik

A. 0 ☐

B. $\frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|V}}\, \hat{e}_{\boldsymbol{q},s}\, \mathrm{e}^{-iqx}$ ☐

C. $a_{\boldsymbol{k},s}$ ☐

D. $\frac{1}{\sqrt{2|\boldsymbol{k}|V}}\, \hat{e}^*_{\boldsymbol{q},s}\, \mathrm{e}^{iqx}$ ☐

E. Ingen av alternativene over. ☐

Oppgave 9.

Lagrangefunksjonen for en modell i kvanteelektrodynamikk med et komplekst Klein-Gordon felt og et Dirac-felt lyder

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(D^{(\varphi)}_{\mu}\varphi\right)^{*}\left(D^{(\varphi)\,\mu}\varphi\right) - V(\varphi^{*}\varphi) + \bar{\Psi}\left(\mathrm{i}\gamma^{\mu}D^{(\psi)}_{\mu} - m\right)\Psi, \tag{3}$$

der $D^{(\varphi)}_{\mu} = \partial_\mu + 2\mathrm{i}eA_\mu$ og $D^{(\psi)}_{\mu} = \partial_\mu - \mathrm{i}eA_\mu$. For bestemte verdier av koeffisientene a og b er denne modellen invariant under lokale gaugetransformasjoner,

$$A_\mu(x) \;\rightarrow\; A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\Lambda(x), \tag{4}$$

$$\varphi(x) \;\rightarrow\; \varphi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}a\Lambda(x)}\,\varphi(x), \tag{5}$$

$$\Psi(x) \;\rightarrow\; \Psi'(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}b\Lambda(x)}\,\Psi(x). \tag{6}$$

Skriv ned disse verdiene:

$a =$ ☐

$b =$ ☐

Oppgave 10.

Etter kvantisering med periodiske grensebetingelser i et volum $V = L^3$ ønsker vi å finne integraluttrykk for fysiske størrelser, gyldig i grensen $V \to \infty$. For tilstrekkelig glatte funksjoner $f(\boldsymbol{k})$ skjer dette ved å la

$$\sum_{\boldsymbol{k}} f(\boldsymbol{k}) \to C \int \mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\, f(\boldsymbol{k}). \tag{7}$$

Skriv ned størrelsen C:

$C = \boxed{}$