NTNU **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52 eller 45 43 71 70

Eksamen i FY8307 KVANTEFELTTEORI I
Mandag 21. mai 2007
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*

Dette oppgavesettet er på 3 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

Oppgave 1. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a) $\mu^- \to e^- \gamma$

b) $\mu^- \to \mu^- e^+ e^-$

c) $e^+ \mu^- \to e^- \mu^+$

d) $e^+ \mu^- \to e^+ \mu^-$

e) $e^+ e^- \to \mu^+ \mu-$

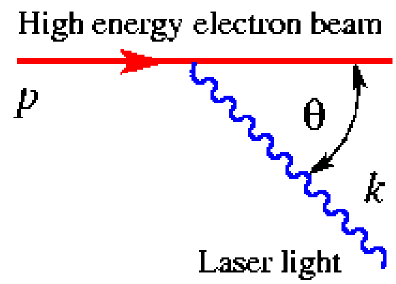
f) $e^+ \gamma \to e^+ \gamma$

g) $e^+ \gamma \to e^+ \gamma\gamma$

h) $\gamma\gamma \to \gamma$

i) $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$

j) Positronium er et bundet system av et elektron og et positron (med bindingsenergi 6.8 eV). Det har vært foreslått å produsere positronium ved å rette en intens laserstråle mot en høyenergetisk elektronstråle. Dette vil altså føre til kollisjoner med $e^-\gamma$ i starttilstanden.
Hvilke Feynman diagrammer vil da svare til produksjon av positronium (og eventuelt andre partikler)?



Oppgave 2. Elektroproduksjon av myoner
I denne oppgaven skal du se på prosessen, $e^+e^- \rightarrow \mu + \mu^-$. Betrakt først prosessen fra massesenter systemet, og regn med naturlige enheter $\hbar = c = 1$ der dette er enklest.

a) Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden i QED for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

Anta at de innkommende elektronet (positronet) har kvantetall p_1, s_1 (p_2, s_2), og at det utgående myonet (antimyonet) har kvantetall p_1', s_1' (p_2', s_2').

b) Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.

c) Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at det innkommende elektronet har energi $E = 2m_e$. Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.

Oppgitt: $m_e = 0.511$ MeV/c^2
$\hbar = 1.054\,572\,66 \times 10^{-34}$ J s $= 6.582\,122\,0 \times 10^{-16}$ eV s, $c = 299\,792\,458$ m s^{-1}, $e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19}$ C, $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137.035\,9895$.

d) Bruk tilsvarende dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at det innkommende elektronet har energi $E \gg m_e$.

e) Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi midler over spinntilstandene (s_1, s_2) til det innkommende elektron-positron paret, og summerer over spinntilstandene (s_1', s_2') til det utgående myon-antimyon paret. Amplitudekvadratet $\sum_{s_1 s_2 s_1' s_2'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ kan da uttrykkes som en sum av spor over γ-matriser (med prefaktorer).

Finn denne summen, og beregn sporene av gammamatriser.

f) Finn et eksplisitt uttrykk for det differensielle parproduksjons tverrsnittet $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{par}}$. Du kan anta at $E \gg m_e$, slik at man kan sette $m_e = 0$ i alle uttrykk. Uttrykk svaret ved energien E og vinkelen ϑ mellom det innkommende elektronet og det utgående myonet.

g) Anta istedet at denne prosessen skjer i et laboratorium der elektronet er i ro, mens positronet har energien E'. Hva er minste verdi for E' for at prosesessen skal kunne skje?

h) Hva blir det differensielle spredningstverrsnittet i dette tilfellet?

Oppgave 3. Forenklet Higgsmodell

I denne oppgaven skal du analysere modellen definert ved Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \kappa^2 \left(D_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \right)^* \left(D^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \right), \tag{1}$$

der $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}A_\mu$, og $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$. Her er e^2 og κ^2 konstanter, mens A^μ og ϕ er de dynamiske feltene (begge reelle). Vi bruker naturlige enheter, $\hbar = c = 1$.

a) Lagrangetettheten (1) er invariant under *globale* fasetransformasjoner, $\phi \to \phi + \alpha$, der α er konstant. Hva blir den tilhørende konserverte Nöther-strømmen?

b) Vis at Lagrangetettheten (1) er invariant under *lokale* fasetransformasjoner, $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha(x)$, hvis man gjør en tilhørende transformasjon av A^μ-feltet. Skriv ned denne transformasjonen.

c) Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene Π_ϕ og Π_μ til henholdsvis feltene ϕ og A^μ?

d) Finn Euler-Lagrange ligningene for A^μ og ϕ.

e) Vis at man kan gjøre en gauge-transformasjon slik at ϕ-feltet elimineres fullstendig fra Lagrangetettheten (1). Vis at bevegelsesligningen for A^μ i dette tilfellet kan reduseres til Klein-Gordon ligningen,

$$\left(\Box + M^2 \right) A^\mu = 0, \tag{2}$$

og finn M^2 uttrykt ved parametrene i Lagrangetettheten.

f) Vi antar nå at Lagrangetettheten (1) definerer en modell i D rom-tid dimensjoner, slik at virkningen $S = \int \mathrm{d}^D x \, \mathcal{L}$ er dimensjonsløs. Hvilke massedimensjoner har da feltene A_μ og ϕ? Og parametrene e^2 og κ^2?

g) Anta nå at $D = 2$, dvs at $x = (t, z)$. Finn i dette tilfellet Fourier-utviklingen av feltet $A^\mu(x)$, uttrykt ved bl.a. kreasjons- og annihilasjons-operatorer og polarisasjonsvektorer ($a^\dagger(k)$, $a(k)$, $e^\mu(k)$).

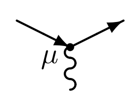
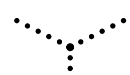
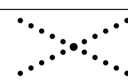
1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt σ

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2\, m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1+p_2-\sum_f p'_f\,)\prod_{f=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3 p'_f}{(2\pi)^3\,2E'_f} \tag{3}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{64\pi^2\,(p_1+p_2)^2}\,\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2\;\mathrm{d}\Omega \qquad \text{for } n=2 \text{ i massesenter systemet} \tag{4}$$

2 Noen Feynmanregler for $-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\longrightarrow\; p, s$	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p, s \longrightarrow\!\bullet$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\longleftarrow\; p, s$	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p, s \longleftarrow\!\bullet$	$\overline{v}(p,s)$
γ (foton)	$\bullet\!\sim\!\sim\!\sim\; k, r$	$e_\mu(k,r)^*$	γ (foton)	$k, r \sim\!\sim\!\sim\!\bullet$	$e_\mu(k,r)$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\cdots k$	1	Uladet spinn–0	$k\; \cdots\cdots\bullet$	1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{\text{int}}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\bullet\!\overset{p}{\longrightarrow}\!\bullet$	$\dfrac{\mathrm{i}(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$	$e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$\mathrm{i}e\gamma^\mu$
γ (foton)	$\mu \overset{k}{\sim\!\sim\!\sim} \nu$	$\dfrac{-\mathrm{i}\eta_{\mu\nu}}{k^2+\mathrm{i}\epsilon}$	$-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-\mathrm{i}\mu$
Uladet spinn–0	$\bullet\cdots\overset{k}{\cdots}\cdots\bullet$	$\dfrac{\mathrm{i}}{k^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$	$-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-\mathrm{i}\lambda$

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor -1 for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der S er diagrammets symmetritall.

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{5}$$

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\,e^*_\nu(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{6}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{7}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^1 \equiv \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{9}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\,\not{p} = p^2 \tag{10}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\gamma^\mu = -2\,\not{p} \tag{11}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{12}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\gamma^\mu = -2\not{r}\,\not{q}\,\not{p} \tag{13}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{14}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{15}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q} = 4\,(pq) \tag{16}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{17}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{18}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$