



Faglig kontakt under eksamen:
 Professor II Tor Wøhni
 Telefon: +47 67 16 25 00
 Kontakt i Trondheim:
 Professor Kåre Olaussen, telefon: +47 45 43 71 70

Eksamen i FY8401/FY8410/VUF4001 IONISERENDE STRÅLINGS VEKSELVIRKNING MED MATERIE

Onsdag 19. mai 2004
 09:00–15:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Godkjent lommekalkulator (dvs. enkel ikke-programmerbar lommekalkulator uten alfanumerisk minne)

Matematisk formelsamling av type K. Rottman: *Matematisk formelsamling*, *Schaums Mathematical Handbook*, Beta: *Mathematical Handbook* eller lignende.

Se også nedenforstående tabell over fysiske konstanter. Ellers er ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt.

Eksamen avholdes samtidig i Trondheim, Oslo, Aalborg og Umeå.

Oppgavesettet er gitt på norsk på side 2–6, og på engelsk på side 7–11.

Sensur blir lagt ut på websiden <http://bohr.phys.ntnu.no/~kolausen/FY8410/> så snart den er klar.

Dette oppgavesettet er på 11 sider.

Constant	Symbol	Value
Atomic mass unit	u	$1.6606 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Avogadro's constant	N_A	$6.0220 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$
Bohr magneton	μ_B	$9.2741 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$
Bohr radius	a_0	$5.2918 \times 10^{-11} \text{ m}$
Boltzmann constant	k	$1.3807 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
Electron charge	e	$1.6022 \times 10^{-19} \text{ C}$
Fine structure constant	α	7.2974×10^{-3}
Electron radius	r_0	$2.8179 \times 10^{-15} \text{ m}$
Electron rest mass	m_e	$9.1095 \times 10^{-31} \text{ kg}$
Electron rest energy	$m_e c^2$	0.5110 MeV
Proton rest mass	m_p	$1.6726 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Neutron rest mass	m_n	$1.6749 \times 10^{-27} \text{ kg}$
Planck constant	h	$6.6261 \times 10^{-34} \text{ Js}$
Planck constant (reduced)	\hbar	$1.0546 \times 10^{-34} \text{ Js}$
Vacuum speed of light	c	$2.9979 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
Vacuum permeability	μ_0	$1.2566 \times 10^{-6} \text{ H m}^{-1}$
Vacuum permittivity	ϵ_0	$8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2 \text{ J}^{-1} \text{ m}^{-1}$
Atomic weight of iron	A_{Fe}	55.84
Atomic number of iron	Z_{Fe}	26
Density of iron	ρ_{Fe}	$7.874 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$

Oppgave 1.

- a) Beskriv hovedprinsippene for deteksjon av termiske (ekstremt lav-energi) nøytroner. Gi eksempler på vanlige detektortyper for termiske nøytroner.
- b) Gi eksempler på forskjellige vanlige teknikker for å produsere nøytroner i ulike energiområder, og beskriv hovedtrekkene ved disse teknikkene, spesielt med tanke på deres medisinske anvendelser.

Oppgave 2.

- a) Rekkevidden til ladete partikler kan beskrives vha R_{CSDA} . Forklar hvordan denne beregnes.
- b) Forklar generelt hvorfor og hvordan sporelengden til enkeltpartikler kan avvike fra R_{CSDA} (stragglings), og forklar hvilken forskjell det vil være med hensyn på stragglings for elektroner og for tunge ladete partikler
- c) Stragglingsfunksjonen i Landaus stragglings-teori betegnes gjerne $f(\Delta, s)$, og kan uttrykkes som en funksjon av Δ og ξ . Forklar den fysiske betydningen av disse parametrene, dvs. f , Δ , s og ξ .

Oppgave 3.

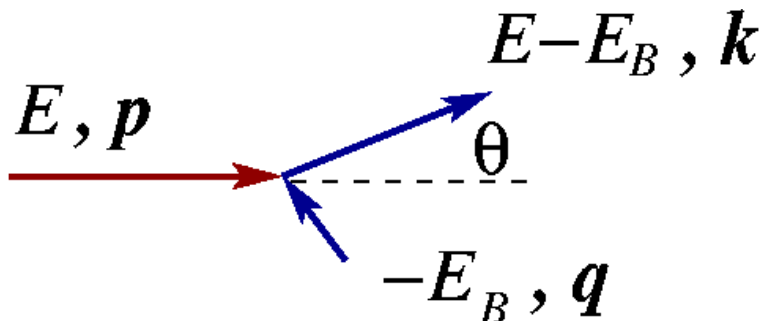
- a) Kollisjons-stoppingpower (S_{col}) for en blanding av stoffer kan beregnes vha “Bragg additivity rule”. Sett opp et uttrykk for denne.
- b) Bruk “Bragg additivity rule”, og beregn S_{col} for vann for 1 MeV elektroner på basis av data i tabellen under, hentet fra ICRU-37.

Atom	S_{col}/ρ for 1 MeV elektroner
H	3,816 MeV cm ² /g
O	1,646 MeV cm ² /g

I samme rapport er S_{col}/ρ for 1 MeV elektroner i vann angitt til 1,849 MeV cm²/g. Hvordan vil du forklare et eventuelt avvik i forhold til resultatet fra beregningen ovenfor.

- c) Et av korreksjonsleddene i det analytiske uttrykket for S_{col} omtales som “skallkorreksjon”. Forklar hva denne korreksjonen innebærer, og hvordan den kan påvirke S_{col} for henholdsvis elektroner og tunge ladete partikler.

Oppgave 4.



Det er ikke kinematisk mulig å absorbere et foton på et fritt elektron fordi bevaringslovene for energi og bevegelsesmengde (impuls) ikke lar seg oppfylle. Situasjonen er imidlertid en annen når elektronet er bundet til en atomkjerne. Da har elektronet en energi $-E_B$ (ikke inkludert hvileenergien $m_e c^2$), der E_B er bindingsenergien, og en *sannsynlighetsfordeling* $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ for bevegelsesmengden \mathbf{q} . Det er derfor en viss sannsynlighet for at de kinematiske relasjonene blir oppfylt, og da vil prosessen være mulig.

- a) Se på kinematikken i figuren på forrige side, der energien E til det innfallende fotonet, bindingsenergien E_B til elektronet i starttilstanden, og utgangsvinkelen θ til det emiterte elektronet antas å være gitt.

Regn ut hva $q^2 \equiv \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$ må være for at bevaringslovene for energi og bevegelsesmengde skal bli oppfylt.

- b) Prøv å forenkle det generelle uttrykket for q

i) når E er svært nær (men større enn) terskelenergien E_B , og

ii) i den ekstremt relativistiske grensen $E \gg m_e c^2$.

- c) Sannsynlighetstettheten $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ for å finne bevegelsesmengden \mathbf{q} i en tilstand gitt av bølgefunksjonen $\psi(\mathbf{r})$ er gitt som

$$\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = |\tilde{\psi}(\mathbf{q})|^2, \quad \text{der} \quad \tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \psi(\mathbf{r}) \quad (1)$$

Finn $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ for grunntilstanden i hydrogenlignende atomer, dvs. når

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}, \quad a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2 Z}. \quad (2)$$

- d) Sett inn det uttrykket du fant for q^2 i punkt a) og vis at θ -avhengigheten til $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ har formen

$$\tilde{\rho} = \frac{\mathcal{N}}{(1 - f \cos \theta)^4}. \quad (3)$$

Her er \mathcal{N} og f størrelser som er uavhengig av θ (og som du ikke trenger å regne ut i detalj).

Oppgitt: Kinetisk energi for en relativistisk partikkel med masse m ,

$$E_K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2.$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4),$$

$$\int d^3r e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} e^{-r/a} = \frac{8\pi a^3}{(1+a^2 b^2)^2} \quad \text{der } b^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}.$$

Oppgave 5.

Et foton med energi $\hbar\omega_1$ spres på et elektron i ro. Det differensielle spredningstverrsnitt for Comptoneffekten er

$$d\sigma_C = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 + 4(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2 \right) d\Omega,$$

der

$$\omega_2 = \omega_1 \left(1 + \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} (1 - \cos\theta) \right)^{-1},$$

m er elektronmassen, \mathbf{e}_1 og \mathbf{e}_2 er polarisasjonsvektorer for inngående og utgående foton, θ er spredningsvinkelen, $d\Omega$ er romvinkel for utgående foton, og r_0 er gitt i tabellen på første side av eksamenssettet.

a) Hva mener vi med et upolarisert tverrsnitt? Summasjon over begge polarisasjonene gir

$$\sum_{\text{pol}} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2 = 1 + \cos^2\theta,$$

der θ er vinkelen mellom retningene til inn- og utgående foton. Vis at det upolariserte tverrsnittet dermed er

$$d\sigma_C^{\text{upol}} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2\theta \right) d\Omega.$$

b) Anta lavenergiapproximasjonen $\hbar\omega_1 \ll mc^2$ og vis at Compton-tverrsnittet da reduserer seg til Thompson-tverrsnittet

$$d\sigma_{\text{Th}}^{\text{upol}} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2\theta) d\Omega.$$

Finn totaltvverrsnittet i denne approximasjonen.

c) For høye energier er totaltvverrsnittet for Comptoneffekt

$$\sigma_C^T = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega_1} \left(\ln\left(\frac{2\hbar\omega_1}{mc^2}\right) + \frac{1}{2} \right).$$

En stråle av fotoner med energi 50 MeV sendes mot en tykk jernblokk. Finn hvor langt strålen går før Comptoneffekten har redusert intensiteten til det halve (neglisjer andre prosesser). Absorpsjonskoeffisienten er $\kappa = \rho_S \sigma^T$ der ρ_S er tettheten av spredende partikler og σ^T er det totale spredningstverrsnitt pr. spredende partikkel.

d) Totaltvverrsnittet for parproduksjon av høyenergetiske fotoner på en kjerne med atomnummer Z er tilnærmet

$$\sigma_{PP}^T = \alpha Z^2 r_0^2 \left(\frac{28}{9} \ln\left(\frac{2\hbar\omega}{mc^2}\right) - \frac{218}{27} \right),$$

der α er gitt på forsiden. Finn forholdet mellom antall fotoner med energi 50 MeV som blir spredt av Comptoneffekt og de som blir absorbert av parproduksjon, i jern. Er det andre effekter som er viktige for fotonabsorpsjon ved denne energien?

e) Vis at polarisasjonssummen $\sum_{\text{pol}} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2$ gir resultatet som er gitt i punkt a).

Oppgave 6.

- a) Skriv ned de relativistiske uttrykkene for energien E og impulsen \mathbf{p} til en fri partikkel med (hvile-)masse m som beveger seg med hastigheten \mathbf{v} . Finn herav et uttrykk for $(E/c)^2 - \mathbf{p}^2$ (energi-impuls-relasjonen). Hva er den tilsvarende relasjonen for et foton?
- b) Vis at et fritt elektron ikke kan emittere et foton. [**Hint:** Vis at det er umulig å bevare både energi og impuls for (den tenkte) prosessen $e^- \rightarrow e^- + \gamma$.]
- c) Betrakt bremsestrålingsprosessen

$$e^- + \text{atomkjerne} \longrightarrow e^- + \text{atomkjerne} + \gamma,$$

der atomkjernen er i ro i begynnelsestilstanden. Angi impulsoverføringen \mathbf{q} til atomkjernen uttrykt ved foton-impulsen $\hbar\mathbf{k}$ og elektronets impulser i begynnelses- og slutttilstandene, \mathbf{p}_i og \mathbf{p}_f .

For ikke-relativistiske energier kan energibevarelsen i prosessen uttrykkes slik:

$$\frac{p_i^2}{2m_e} \approx \frac{p_f^2}{2m_e} + \hbar\omega_k \quad (\omega_k = c|\mathbf{k}|).$$

Hvilket bidrag til energien i slutt-tilstanden er neglisjert i denne relasjonen (bortsett fra relativistiske korreksjoner), og hvorfor er dette en god approksimasjon? Hva er den maksimale energien til det emitterte fotonet?

Tverrsnittet $d\sigma$ for bremsestrålingsprosessen ovenfor er proporsjonalt med kvadratet av

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \phi_f^0 | V | \phi_i^0 \rangle + \langle \phi_f^0 | V \left(\sum_m \frac{|\phi_m^0\rangle\langle\phi_m^0|}{E_i - E_m} \right) V | \phi_i^0 \rangle + \dots, \quad (4)$$

$$\equiv \mathcal{M}_{fi}^{(1)} + \mathcal{M}_{fi}^{(2)} + \dots. \quad (5)$$

Her er vekselvirkningsoperatoren

$$V = V_C + \frac{e}{m_e} \mathbf{p}^{\text{op}} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m_e} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A},$$

der $V_C(r)$ er Coulomb-potensialet mellom elektronet og atomkjernen, og

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{r'\mathbf{k}'} \hat{\epsilon}_{r'\mathbf{k}'} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V_0 \omega_{k'}}} \left(a_{r'\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} + a_{r'\mathbf{k}'}^\dagger e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}} \right).$$

Med 3 ledd i V består $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ i prinsippet av 3 ledd. Tilsvarende består operatoren $V(\sum \dots)V$ i uttrykket for $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ (og dermed $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ selv) av $3 \times 3 = 9$ ledd.

- d) Anta for et øyeblikk at V_C settes lik null (atomkjernen fjernes). De gjenværende leddene i $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ og $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ (altså de leddene som *ikke* inneholder V_C) er da alle lik null; disse leddene beskriver den umulige prosessen under punkt b). Forklar hvorfor også bidraget $\langle \phi_f^0 | V_C | \phi_i^0 \rangle$ til $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ er lik null. (**Hint:** Se på foton-delen av dette matriselementet.) Forklar også hvorfor operator-leddene $V_C(\sum \dots)V_C$, $V_C(\sum \dots)\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ og $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}(\sum \dots)V_C$ ikke bidrar til $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$.

- e) Hvert av de to leddene i $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ som *ikke* er lik null kan skrives som et dobbelt-integral. Det ene av disse [som svarer til kombinasjonen $(e/m_e)\mathbf{p}^{\text{op}} \cdot \mathbf{A}(\sum \dots)V_C$ i uttrykket $V(\sum \dots)V$] kan skrives slik:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2a)} = \int d^3r_1 \int d^3r_2 \psi_{\mathbf{p}_f}^*(\mathbf{r}_1) \left(\frac{e}{m_e} \hat{\epsilon}_{r\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}_f \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V_0 \omega_k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} \right) \times \\ \times \sum_m \frac{\psi_{\mathbf{p}_m}(\mathbf{r}_1) \psi_{\mathbf{p}_m}^*(\mathbf{r}_2)}{E_i - E_m} V_C(\mathbf{r}_2) \psi_{\mathbf{p}_i}(\mathbf{r}_2).$$

Forklar (ut fra integralet over \mathbf{r}_1) hvorfor summen over m gir bare ett bidrag, og angi verdiene av impulsen \mathbf{p}_m og energien E_m for dette bidraget. [**Hint:** Bølgefunksjonene $\psi_{\mathbf{p}_i}(\mathbf{r})$ osv er av typen $V_0^{-1/2} \exp(i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar)$, hvor V_0 er normeringsvolumet.]

- f) Skriv ned et dobbeltintegral, tilsvarende det som er oppgitt ovenfor, for det *andre* leddet ($\mathcal{M}_{fi}^{(2b)}$) som bidrar til $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$. [Dette leddet svarer til kombinasjonen

$$V_C(\sum \dots)(e/m_e)\mathbf{p}^{\text{op}} \cdot \mathbf{A}$$

i uttrykket $V(\sum \dots)V$]. Hva blir \mathbf{p}_m i dette leddet? Hva blir E_m ?

Oppgitt: $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

Problem 1.

- a) Describe the main principles behind detection of thermal (extremely low-energy) neutrons. Give examples of common thermal-neutron detectortypes.
- b) Give examples of various common techniques to produce neutrons in different energy intervals, and describe the main features of these techniques, in particular concerning their use in medical applications.

Problem 2.

- a) The range of charged particles may be described by R_{CSDA} . Explain how this parameter is calculated.
- b) Explain in general how and why the pathlength of individual particles may differ from the R_{CSDA} (straggling), and explain how the straggling for electrons and for heavy charged particles may be different.
- c) The straggling function in Landaus straggling theory is often denoted $f(\Delta, s)$, and can be expressed as a function of Δ og ξ . Explain the physical meaning of these parameters, i.e. f, Δ, s og ξ .

Problem 3.

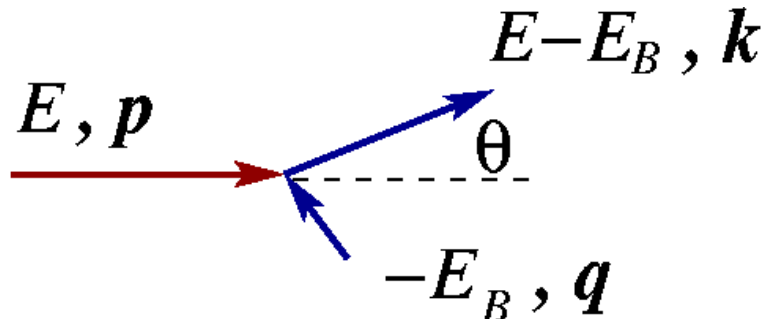
- a) The collision stopping power (S_{col}) for a mixture of elements may be calculated by using the “Bragg additivity rule”. Give an expression for this.
- b) Use the “Bragg additivity rule”, and calculate S_{col} for 1 MeV electrons in water on the basis of the following data from ICRU-37.

Atom	S_{col}/ρ for 1 MeV electrons
H	3.816 MeV cm ² /g
O	1.646 MeV cm ² /g

In the same report S_{col}/ρ for 1 MeV electrons in water is listed as 1.849 MeV cm²/g. How will you explain any possible difference compared to the results of the calculations above.

- c) One of the corrections in the analytical expression for S_{col} is termed “shell correction”. Explain the content of this correction, and how it may influence S_{col} for electrons and heavy charged particles, respectively.

Problem 4.



It is not kinematically possible to absorb a photon by a free electron because the conservation laws for energy and momenta cannot be fulfilled. However, the situation is different when the electron is bound to an atomic nucleus. In that case the electron has an energy $-E_B$ (not including the rest energy $m_e c^2$), where E_B is the binding energy, and a *probability distribution* $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ for momenta \mathbf{q} . Thus there is a certain probability that the kinematical relations are fulfilled, in which case the process is possible.

- a) Consider the kinematics of the figure on the previous page, where E is the energy of the incoming photon, E_B is the binding energy of the initial electron, and θ is the angle at which the electron is emitted. These three quantities are assumed given.

Calculate the value of $q^2 \equiv \mathbf{q} \cdot \mathbf{q}$ necessary for fulfilling the conservation laws for energy and momenta.

- b) Try to simplify the general expression for q

- i) when E is very close to (but larger than) the threshold energy E_B , and
- ii) in the extreme relativistic limit $E \gg m_e c^2$.

- c) The probability density $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ for finding momenta \mathbf{q} in a state defined by the wave function $\psi(\mathbf{r})$ is given by

$$\tilde{\rho}(\mathbf{q}) = |\tilde{\psi}(\mathbf{q})|^2, \quad \text{where} \quad \tilde{\psi}(\mathbf{q}) = \int \frac{d^3r}{(2\pi\hbar)^{3/2}} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}/\hbar} \psi(\mathbf{r}) \quad (6)$$

Find $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ for the ground state of hydrogen like atoms, i.e. when

$$\psi(\mathbf{r}) = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}} e^{-r/a}, \quad r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}, \quad a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2 Z}. \quad (7)$$

- d) Insert the expression you found for q^2 under point a), and show that the θ -dependence of $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ is of the form

$$\tilde{\rho} = \frac{\mathcal{N}}{(1 - f \cos \theta)^4}. \quad (8)$$

Here \mathcal{N} and f are quantities independent of θ (which you don't have to evaluate in detail).

Given: The kinetic energy of a relativistic particle with mass m ,

$$\begin{aligned} E_K &= \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2. \\ \sqrt{1+x^2} &= 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4), \\ \int d^3r e^{-i\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}} e^{-r/a} &= \frac{8\pi a^3}{(1+a^2 b^2)^2} \quad \text{where } b^2 = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Problem 5.

A photon with energy $\hbar\omega_1$ is scattered on an electron at rest. The differential scattering cross section for the Compton effect is

$$d\sigma_C = \frac{r_0^2}{4} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - 2 + 4(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2 \right) d\Omega,$$

where

$$\omega_2 = \omega_1 \left(1 + \frac{\hbar\omega_1}{mc^2} (1 - \cos\theta) \right)^{-1},$$

m is the electron mass, \mathbf{e}_1 and \mathbf{e}_2 are polarization vectors for ingoing and outgoing photons, θ is the scattering angle, $d\Omega$ is the solid angle for the outgoing photon, and r_0 is given on the first page of the exam set.

a) What do we mean by an unpolarized cross section? Summation over polarizations gives

$$\sum_{\text{pol}} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2 = 1 + \cos^2\theta,$$

where θ is the angle between the directions of the in- and outgoing photons. Show that the unpolarized cross section therefore is

$$d\sigma_C^{\text{unpol}} = \frac{r_0^2}{2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} + \frac{\omega_1}{\omega_2} - \sin^2\theta \right) d\Omega.$$

b) Assume the low-energy approximation $\hbar\omega_1 \ll mc^2$ and show that the Compton cross section then is reduced to the Thompson cross section

$$d\sigma_{Th}^{\text{unpol}} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2\theta) d\Omega.$$

Find the total cross section in this approximation.

c) For high energies the total cross section for the Compton effect is

$$\sigma_C^T = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega_1} \left(\ln\left(\frac{2\hbar\omega_1}{mc^2}\right) + \frac{1}{2} \right).$$

A ray of photons with energy 50 MeV is sent at a slab of iron. Find how far the ray will go before the Compton effect has reduced the intensity to the half value. (Neglect other processes.) The absorption coefficient is $\kappa = \rho_S \sigma^T$ where ρ_S is the density of scattering particles and σ^T is the total scattering cross section per scattering particle.

d) The total cross section for pair production of high-energy photons on a nucleus with atomic number Z is approximately

$$\sigma_{PP}^T = \alpha Z^2 r_0^2 \left(\frac{28}{9} \ln\left(\frac{2\hbar\omega}{mc^2}\right) - \frac{218}{27} \right),$$

where α is given on the front page. Find the relation between the number of photons with energy of 50 MeV which will be scattered by the Compton effect and those which are absorbed by pair production, in iron. Are there other effects that are important for the absorption of photons at this energy?

e) Show that the polarization sum $\sum_{\text{pol}} (\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2)^2$ gives the result given in point a).

Problem 6.

- a) Write down the relativistic expressions for the energy E and the momentum \mathbf{p} for a free particle with (rest) mass m moving with the velocity \mathbf{v} . Use this to find an expression for $(E/c)^2 - \mathbf{p}^2$ (the energy-momentum relation). What is the corresponding relation for a photon?
- b) Show that a free electron cannot emit a photon. [**Hint:** Show that it is impossible to conserve both energy and momentum for the (fictitious) process $e^- \rightarrow e^- + \gamma$.]
- c) Consider the bremsstrahlung process

$$e^- + \text{nucleus} \longrightarrow e^- + \text{nucleus} + \gamma,$$

where the nucleus is at rest in the initial state. Give an expression for the momentum transfer \mathbf{q} to the nucleus, in terms of the photon momentum $\hbar\mathbf{k}$ and the electron momenta in the initial and final states, \mathbf{p}_i and \mathbf{p}_f .

For non-relativistic energies, the energy conservation for this process can be expressed as follows:

$$\frac{p_i^2}{2m_e} \approx \frac{p_f^2}{2m_e} + \hbar\omega_k \quad (\omega_k = c|\mathbf{k}|).$$

Which contribution to the energy of the final state has been neglected in this relation (apart from relativistic corrections), and why is this a good approximation? What is the maximal energy of the emitted bremsstrahlung photon?

The cross section $d\sigma$ for the bremsstrahlung process above is proportional to the square of

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \phi_f^0 | V | \phi_i^0 \rangle + \langle \phi_f^0 | V \left(\sum_m \frac{|\phi_m^0\rangle\langle\phi_m^0|}{E_i - E_m} \right) V | \phi_i^0 \rangle + \dots, \quad (9)$$

$$\equiv \mathcal{M}_{fi}^{(1)} + \mathcal{M}_{fi}^{(2)} + \dots. \quad (10)$$

Here, the interaction operator is

$$V = V_C + \frac{e}{m_e} \mathbf{p}^{\text{op}} \cdot \mathbf{A} + \frac{e^2}{2m_e} \mathbf{A} \cdot \mathbf{A},$$

where $V_C(r)$ is the Coulomb potential between the electron and the nucleus, and

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{r}'\mathbf{k}'} \hat{\epsilon}_{\mathbf{r}'\mathbf{k}'} \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V_0 \omega_{\mathbf{k}'}}} \left(a_{\mathbf{r}'\mathbf{k}'} e^{i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} + a_{\mathbf{r}'\mathbf{k}'}^\dagger e^{-i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}} \right).$$

With 3 terms in V , $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ in principle consists of 3 terms. Similarly, the operator $V(\sum \dots)V$ in $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ (and hence $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ itself) consists of $3 \times 3 = 9$ terms.

- d) Suppose for a moment that V_C is set equal to zero (the nucleus is removed). Then the remaining terms in $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ and $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ (that is, the terms *not* containing V_C) are all equal to zero; these terms describe the impossible process in point **b**). Explain why also the contribution $\langle \phi_f^0 | V_C | \phi_i^0 \rangle$ to $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ is equal to zero. (**Hint:** Consider the photon part of this matrix element.) Explain also why the operator terms $V_C(\sum \dots)V_C$, $V_C(\sum \dots)\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}$ and $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}(\sum \dots)V_C$ do not contribute to $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$.

- e) Each of the two terms of $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ which are *not* equal to zero can be written as a double integral. One of these [which corresponds to the combination $(e/m_e)\mathbf{p}^{\text{op}} \cdot \mathbf{A}(\sum \dots)V_C$ in the expression $V(\sum \dots)V$] can be written as

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2a)} = \int d^3r_1 \int d^3r_2 \psi_{\mathbf{p}_f}^*(\mathbf{r}_1) \left(\frac{e}{m_e} \hat{\epsilon}_{r\mathbf{k}} \cdot \mathbf{p}_f \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V_0 \omega_k}} e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}_1} \right) \times \\ \times \sum_m \frac{\psi_{\mathbf{p}_m}(\mathbf{r}_1) \psi_{\mathbf{p}_m}^*(\mathbf{r}_2)}{E_i - E_m} V_C(\mathbf{r}_2) \psi_{\mathbf{p}_i}(\mathbf{r}_2).$$

Explain (using the integral over \mathbf{r}_1) why the sum over m gives only one contribution, and state what the values are for the momentum \mathbf{p}_m and the energy E_m for this contribution. [Hint: The wave functions $\psi_{\mathbf{p}_i}(\mathbf{r})$ etc are of the type $V_0^{-1/2} \exp(i\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{r}/\hbar)$, where V_0 is the normalization volume.]

- f) Write down a double integral, corresponding to that given above, for the *second* term ($\mathcal{M}_{fi}^{(2b)}$) which contributes to $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$. [This term corresponds to the combination

$$V_C(\sum \dots)(e/m_e)\mathbf{p}^{\text{op}} \cdot \mathbf{A}$$

in the expression $V(\sum \dots)V$.] What is the resulting value for \mathbf{p}_m in this term? What is the value of E_m ?

Given: $a|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle.$