Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i

FY8401/FY8410/VUF4001 IONISERENDE STRÅLINGS VEKSELVIRKNING MED MATERIE

Onsdag 19. mai 2004

Eksamen ble avholdt samtidig i Trondheim, Oslo, Aalborg og Umeå.

Dette løsningsforslaget er på 12 sider.

Constant	**Symbol**	**Value**
Atomic mass unit	u	1.6606×10^{-27} kg
Avogadro's constant	N_{A}	6.0220×10^{26} kmol^{-1}
Bohr magneton	μ_{B}	9.2741×10^{-24} J T^{-1}
Bohr radius	a_0	5.2918×10^{-11} m
Boltzmann constant	k	1.3807×10^{-23} J K^{-1}
Electron charge	e	1.6022×10^{-19} C
Fine structure constant	α	7.2974×10^{-3}
Electron radius	r_0	2.8179×10^{-15} m
Electron rest mass	m_{e}	9.1095×10^{-31} kg
Electron rest energy	$m_{\mathrm{e}}c^2$	0.5110 MeV
Proton rest mass	m_{p}	1.6726×10^{-27} kg
Neutron rest mass	m_{n}	1.6749×10^{-27} kg
Planck constant	h	6.6261×10^{-34}Js
Planck constant (reduced)	$\hbar$	1.0546×10^{-34}Js
Vacuum speed of light	c	2.9979×10^{8} m s^{-1}
Vacuum permeability	μ_0	1.2566×10^{-6} H m^{-1}
Vacuum permittivity	ε_0	8.8542×10^{-12} C^2 J^{-1} m^{-1}
Atomic weight of iron	A_{Fe}	55.84
Atomic number of iron	Z_{Fe}	26
Density of iron	ρ_{Fe}	7.874×10^{3} kg m^{-3}

Oppgave 1. (Gitt av Jan Blomgren)

a) Beskriv hovedprinsippene for deteksjon av termiske (ekstremt lav-energi) nøytroner. Gi eksempler på vanlige detektortyper for termiske nøytroner.

Main principle: For thermal neutrons, the kinetic energy itself provided by the neutron is too low for any detection technique. Therefore, detection has to proceed via a neutron-induced nuclear reaction with a large positive Q-value. Moreover, neutrons themselves cannot be directly detected because of their lack of electric charge. *Hence, detection of thermal neutrons has to proceed via a neutron-induced nuclear reaction with a large positive Q-value that leads to release of charged particles.*

Common detectors for thermal neutrons: The following nuclear reactions are utilized: i) Fission, ii) ^{10}B(n,α), iii) ^{6}Li(n,α), and iv) ^{3}He(n,p). The most common type of neutron detector in medical applications are gas-filled proportional counters, filled with BF_3 gas.

b) Gi eksempler på forskjellige vanlige teknikker for å produsere nøytroner i ulike energiområder, og beskriv hovedtrekkene ved disse teknikkene, spesielt med tanke på deres medisinske anvendelser.

Thermal energies: Reactors are the most common sources. These are used for, e.g., BNCT treatments. There are plans to utilize the ^{7}Li(p,n) reaction because it would allow possibilities to build compact and cost-effective hospital-based machines.

Fast neutrons: The ^{7}Li(p,n) reaction is the most commonly used production reaction for fast-neutron cancer therapy. (p,n) and (d,n) reactions on Beryllium are often used alternatives. The ^{3}H(d,n) reaction is relatively common for production of 14 MeV neutrons.

Oppgave 2. (Gitt av Tor Wøhni)

a) Rekkevidden til ladete partikler kan beskrives vha R_{CSDA}. Forklar hvordan denne beregnes.

$R_{\text{CSDA}} = r_0$ ICRU-37:

$$r_0(T_0 \to T_f) = \rho \int_{T_0}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{S_{\text{col}}(T) + S_{\text{rad}}(T)} \tag{1}$$

r_0 representerer gjennomsnittlig sporlengde for et *elektron* "as it slows down from initial energy T_0 to final energy T_f".

For tunge ladete partikler:

$$r_0(T_0 \to T_f) = \rho \int_{T_0}^{T_f} \frac{\mathrm{d}T}{S_{\text{col}}(T) + S_{\text{nuc}}(T)}. \tag{2}$$

Aksepterer

$$R_{\text{CSDA}} = \int_0^{T_0} \frac{\mathrm{d}T}{dT/dS} \tag{3}$$

som fullverdig svar.

b) Forklar generelt hvorfor og hvordan sporlengden til enkeltpartikler kan avvike fra R_{CSDA} (straggling), og forklar hvilken forskjell det vil være med hensyn på straggling for elektroner og for tunge ladete partikler

Sporlengden for enkeltpartikler kan variere av statistiske årsaker. For tunge ladete partikler kan man forvente en Gaussfordeling rundt R_{CSDA}, fordi rekkevidden kan sees som et resultat av mange små energitap. Variasjonen i sporlengde uttrykkes ofte vha "straggling parameteren" — som igjen kan uttrykkes vha standardavviket (σ) i Gaussfordelingen, $S = \sqrt{\pi/2}\,\sigma$. (Ifølge ICRU-49 er også fordelingen for tunge ladete partikler litt skjev, dvs "most probable path length is slightly larger than average path length").

Straggling for elektroner er større enn for tunge ladete partikler, da rekkevidde-straggling generelt går som $(dE/dX)^{-3}$. Elektroner kan i tillegg miste mye av sin energi i ett støt, og rekkeviddefordelingen er ikke lenger Gaussisk.

Bethe-Ashkin angir rekkevidde-straggling (dvs straggling-parameteren) til 1–2% for protoner og 10–15% for elektroner.

c) Stragglingfunksjonen i Landaus stragglingteori betegnes gjerne $f(\Delta, s)$, og kan uttrykkes som en funksjon av Δ og ξ. Forklar den fysiske betydningen av disse parametrene, dvs. f, Δ, s og ξ.

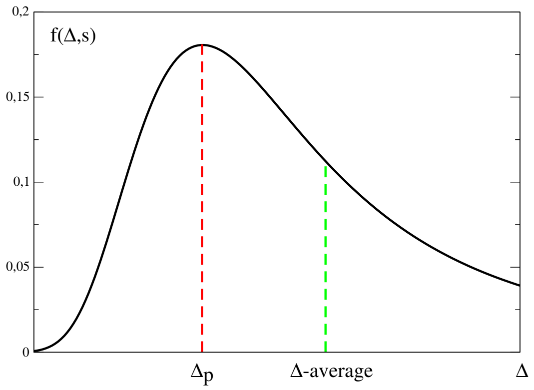
Landaus stragglingfunksjon gjelder energistraggling for elektroner gjennom relativt tynne absorbatorer.

$f(\Delta, s)$ = sannsynligheten for at et elektron har tapt energi Δ ved gjennomgang av materialtykkelsen s (egentlig sporlengden s).

(Δ–average $= sS_{\mathrm{col}}$ =gjennomsnittlig energitap.)

Landaus stragglingfunksjon er ikke symmetrisk rundt Δ–average, det mest hyppige energitap Δ_p er mindre enn Δ–average.

$f(\Delta, s)$ = energitapsfordelingen.
Δ = energitap i løpet av s.
s = absorbatortykkelse, egentlig sporlengde.
ξ = absorbatortykkelsen er indirekte angitt ved denne parameter. ξ representerer en cut-off i energitap, slik at det i gjennomsnitt er én kollisjon med energitap større enn ξ i løpet av den aktuelle s-verdi. Teorien gir gode resultatet når $\xi \gg I$, dvs mye større enn gjennomsnittlig ion./excit energi.



Oppgave 3. (Gitt av Tor Wøhni)

a) Kollisjons-stoppingpower (S_{col}) for en blanding av stoffer kan beregnes vha "Bragg additivity rule". Sett opp et utrykk for denne.

Bragg additivity rule:

$$\frac{S}{\rho} = \sum_i \varepsilon_i \left(\frac{S}{\rho}\right)_i, \quad \text{der} \quad \begin{array}{l} \varepsilon_i = \text{vektfraksjon av substance } i, \\ (S/\rho)_i = \text{mass stopping power for substance } i. \end{array} \tag{4}$$

b) Bruk "Bragg additivity rule", og beregn S_{col} for vann for 1 MeV elektroner på basis av data i tabellen under, hentet fra ICRU-37.

Atom	S_{col}/ρ for 1 MeV elektroner
H	$3,816$ MeV cm^2/g
O	$1,646$ MeV cm^2/g

I samme rapport er S_{col}/ρ for 1 MeV elektroner i vann angitt til $1,849$ MeV cm^2/g. Hvordan vil du forklare et eventuelt avvik i forhold til resultatet fra beregningen ovenfor.

$$\begin{aligned}\left(\frac{S}{\rho}\right)_{H_2O} &= \frac{2}{18}\left(\frac{S}{\rho}\right)_H + \frac{16}{18}\left(\frac{S}{\rho}\right)_O \\ &= (0,4240 + 1,4631)\ \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}} = 1,887\ \frac{\text{MeV cm}^2}{\text{g}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Dette er noe mer enn "fasiten" på 1,849, dvs 2%. Forskjellen skyldes sannsynligvis forskjeller i I = mean ion.&excit potential, en parameter som inngår i S_{col}. I påvirkes av kjemiske bindinger, fordi energinivåene til valenselektronene påvirkes av kjemiske bindinger. (Densitetseffekten kunne tenkes å spille en rolle. Denne utgjør typisk 1,2% for 1 MeV elektroner i vann, men skulle bevirke en reduksjon i S_{col}, og ikke en økning.)

c) Et av korreksjonsleddene i det analytiske uttrykket for S_{col} omtales som "skallkorreksjon". Forklar hva denne korreksjonen innebærer, og hvordan den kan påvirke S_{col} for henholdsvis elektroner og tunge ladete partikler.

Skallkorreksjonen inngår i utrykket for S_{col}, først og fremst for tunge ladete partikler.

$$\frac{S_{col}}{\rho} = \frac{4\pi r_0^2 m_e c^2}{\beta^2}\frac{z^2 Z}{uA}\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{2m_e c^2\beta^2 W_m}{(1-\beta^2)}\right) - \beta^2 - \ln I - \frac{C}{Z} - \frac{\delta}{2} + \cdots\right] \tag{6}$$

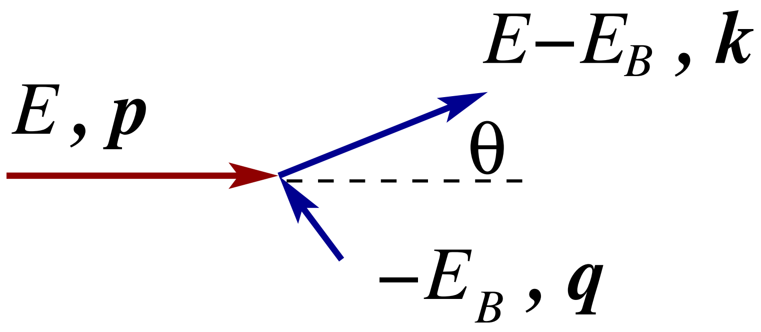
Skallkorreksjonen C/Z kan også sees som en sum over ulike subskall, dvs $\lambda = \sum C_i/Z$.

Evans kalle korreksjonen "Corrections for non-participating electrons" — og korreksjonen skyldes at tunge ladete partikler kan ikke overføre tilstrekkelig energi til å rive løs de sterkest bundne elektronene (K og L-skallet). Max energioverføring(W_m i S_{col}–uttrykket) for tunge ladete partikler er $2m_e v^2$, der v er ionehastigheten. Når $2m_e v^2$ er mindre enn bindingsenergien bidrar altså ikke dette skallet til S_{col}, og denne reduseres. Fremstilles ofte som ekvivalent med at ionehastigheten er av samme størrelse som banehastigheten til elektronene.

Elektronene kan i prinsippet overføre hele sin energi, og skallkorreksjonen blir dermed mindre viktig. Kan bety noe for svært lave elektronenergier — i høy-Z materialer. Bindingsenergi i K-skallet for Z = 50 er ca. 30 keV, og ved elektronenergier under dette vil ikke K-skallet bidra.

C/Z–korreksjon	C	Cu	Au
2 MeV-protoner	3,6%	11%	13%
12 MeV protoner	0,5%	3,5%	7,2%

Oppgave 4. (Gitt av Kåre Olaussen)



Det er ikke kinematisk mulig å absorbere et foton på et fritt elektron fordi bevaringslovene for energi og bevegelsesmengde (impuls) ikke lar seg oppfylle. Situasjonen er imidlertid en annen når elektronet er bundet til en atomkjerne. Da har elektronet en energi $-E_B$ (ikke inkludert hvileenergien $m_e c^2$), der E_B er bindingsenergien, og en *sannsynlighetsfordeling* $\tilde{\rho}(\boldsymbol{q})$ for bevegelsesmengden $\boldsymbol{q}$. Det er derfor en viss sannsynlighet for at de kinematiske relasjonene blir oppfylt, og da vil prosessen være mulig.

a) Se på kinematikken i figuren på forrige side, der energien E til det innfallende fotonet, bindingsenergien E_B til elektronet i starttilstanden, og utgangsvinkelen θ til det emitterte elektronet antas å være gitt.

Regn ut hva $q^2 \equiv \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{q}$ må være for at bevaringslovene for energi og bevegelsesmengde skal bli oppfylt.

Bevaring av bevegelsesmengde impliserer at vi må har $\boldsymbol{p}+\boldsymbol{q}=\boldsymbol{k}$, dvs.

$$q^2 = (\boldsymbol{k}-\boldsymbol{p})^2 = k^2 + p^2 - 2kp\cos\theta, \tag{7}$$

der vi har sammenhengene $E = pc$ og (bevaring av enegi medfører at det emitterte elektronet må ha energi $E - E_B$),

$$E - E_B = \sqrt{(kc)^2 + (m_e c^2)^2} - m_e c^2,$$

dvs.

$$p = \frac{1}{c}E, \qquad k = \frac{1}{c}\sqrt{(E-E_B)\,(E-E_B+2m_e c^2)}. \tag{8}$$

Det har ikke så veldig stor hensikt å sette disse uttrykkene eksplisitt inn i ligning (7).

b) Prøv å forenkle det generelle utrykket for q

i) når E er svært nær (men større enn) terskelenergien E_B, og
ii) i den ekstremt relativistiske grensen $E \gg m_e c^2$.

i) Når $E \approx E_B$ kan vi sette $p \approx E_B/c$, og $k \approx \sqrt{2m_e(E-E_B)} \approx 0$. Ved innsetting i ligning (7) kan vi da tilnærme

$$q \approx p \approx \frac{E_B}{c}. \tag{9}$$

Merk at det energi-området der denne tilnærmelsen er god er *meget* lite. Vi finner at $k \approx p$ når

$$\frac{E-E_B}{E_B} \approx \frac{E_B}{2m_e c^2},$$

så tilnærmelsen er bare god sålenge $0 \le (E-E_B)/E_B \ll E_B/m_e c^2$.

ii) Når $E \gg m_e c^2 > E_B$ kan vi sette $k \approx p = E/c$, slik at vi etter innsetting i ligning (7) får

$$q \approx \frac{E}{c}\sqrt{2(1-\cos\theta)} = \frac{2E}{c}\sin\theta/2. \tag{10}$$

c) Sannsynlighetstettheten $\tilde{\rho}(\boldsymbol{q})$ for å finne bevegelsesmengden $\boldsymbol{q}$ i en tilstand gitt av bølgefunksjonen $\psi(\boldsymbol{r})$ er gitt som

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{q}) = |\tilde{\psi}(\boldsymbol{q})|^2, \qquad \text{der} \qquad \tilde{\psi}(\boldsymbol{q}) = \int \frac{\mathrm{d}^3 r}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar}\, \psi(\boldsymbol{r}) \tag{11}$$

Finn $\tilde{\rho}(\boldsymbol{q})$ for grunntilstanden i hydrogenlignende atomer, dvs. når

$$\psi(\boldsymbol{r}) = \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}}\, \mathrm{e}^{-r/a}, \qquad r^2 = \boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}, \qquad a = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2 Z}. \tag{12}$$

Vi beregner først

$$\tilde{\Psi}(\boldsymbol{q}) = \int \frac{d^3 r}{(2\pi\hbar)^{3/2}}\, \mathrm{e}^{-i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}/\hbar} \sqrt{\frac{1}{\pi a^3}}\, \mathrm{e}^{-r/a} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi}\, \frac{(a/\hbar)^{3/2}}{(1+q^2a^2/\hbar^2)^2}. \tag{13}$$

Elektronets bevegelsesmengde $\boldsymbol{q}$ har da sannsynlighetsfordelingen

$$\tilde{\rho}(\boldsymbol{q}) = \frac{8}{\pi^2}\, \frac{a^3/\hbar^3}{(1+q^2a^2/\hbar^2)^4}. \tag{14}$$

d) Sett inn det uttrykket du fant for q^2 i punkt **a)** og vis at θ-avhengigheten til $\tilde{\rho}(\boldsymbol{q})$ har formen

$$\tilde{\rho} = \frac{\mathcal{N}}{(1-f\cos\theta)^4}. \tag{15}$$

Her er $\mathcal{N}$ og f størrelser som er uavhengig av θ (og som du ikke trenger å regne ut i detalj).

Av ligning (7) ser vi a q^2 har formen $q^2 = A - B\cos\theta$, som innsatt i ligning (14) viser at denne kan skrives på formen

$$\tilde{\rho} = \frac{C}{(D+A-B\cos\theta)^4}, \tag{16}$$

(med $D = \hbar^2/a^2$), som igjen kan omskrives på den oppgitte form, med

$$\mathcal{N} = \frac{C}{(A+D)^4}, \quad \text{og} \quad f = \frac{B}{A+D}.$$

Det viktige her er at alle størrelsene $A,\ldots,D$ ikke avhenger av θ. Men hvis man setter inn de nøyaktige uttrykkene finner man

$$\mathcal{N} = \frac{8}{\pi^2}\frac{a^3/\hbar^3}{[1+(k^2+p^2)a^2/\hbar^2]^4} \quad \text{og} \quad f = \frac{2kp\,a^2/\hbar^2}{1+(k^2+p^2)\,a^2/\hbar^2}. \tag{17}$$

Oppgitt: Kinetisk energi for en relativistisk partikkel med masse m,

$$E_K = \sqrt{(pc)^2+(mc^2)^2} - mc^2.$$

$$\sqrt{1+x^2} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \mathcal{O}(x^4),$$

$$\int \mathrm{d}^3 r\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{r}}\, \mathrm{e}^{-r/a} = \frac{8\pi a^3}{(1+a^2b^2)^2} \qquad \text{der } b^2 = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}.$$

Oppgave 5. (Gitt av Kjell Mork)

Et foton med energi $\hbar\omega_1$ spres på et elektron i ro. Det differensielle spredningstverrsnitt for Comptoneffekten er

$$d\sigma_C = \frac{r_0^2}{4}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}-2+4(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)^2\right)d\Omega,$$

der

$$\omega_2 = \omega_1\left(1+\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}(1-\cos\theta)\right)^{-1},$$

m er elektronmassen, $\boldsymbol{e}_1$ og $\boldsymbol{e}_2$ er polarisasjonsvektorer for inngående og utgående foton, θ er spredningsvinkelen, $d\Omega$ er romvinkel for utgående foton, og r_0 er gitt i tabellen på første side av eksamenssettet.

a) Hva mener vi med et upolarisert tverrsnitt? Summasjon over begge polarisasjonene gir

$$\sum_{\text{pol}}(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)^2 = 1+\cos^2\theta,$$

der θ er vinkelen mellom retningene til inn- og utgående foton. Vis at det upolariserte tverrsnittet dermed er

$$d\sigma_C^{\text{upol}} = \frac{r_0^2}{2}\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}\right)^2\left(\frac{\omega_2}{\omega_1}+\frac{\omega_1}{\omega_2}-\sin^2\theta\right)d\Omega.$$

σ^{upol} er tverrsnitttet midlet over polarisasjon til innkommende foton og summert over polarisasjon til utgående foton,

$$d\sigma^{\text{upol}} = \frac{1}{2}\sum_{\text{pol}} d\sigma.$$

For Comptoneffekten er $d\sigma_C$ av formen

$$d\sigma_C = A + B(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)^2,$$

og polarisasjonssummeringen gir

$$\sum_{\text{pol}} A = A\sum_{\text{pol}} = 4A, \qquad \sum_{\text{pol}}(\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2)^2 = (1+\cos^2\theta),$$

så

$$d\sigma_C^{\text{upol}} = \frac{1}{2}(4A + B(1+\cos^2\theta)),$$

som gir det gitte uttrykk.

b) Anta lavenergiapproksimasjonen $\hbar\omega_1 \ll mc^2$ og vis at Compton-tverrsnittet da reduserer seg til Thompson-tverrsnittet

$$d\sigma_{\text{Th}}^{\text{upol}} = \frac{r_0^2}{2}(1+\cos^2\theta)d\Omega.$$

Finn totaltverrsnittet i denne approksimasjonen.

For lave energier er $\omega_1/\omega_2 \approx 1$ så

$$d\sigma_C^{\text{upol}} = \frac{r_0^2}{2}(1+1-\sin^2\theta)d\Omega = \frac{r_0^2}{2}(1+\cos^2\theta)d\Omega.$$

Integrert over romvinkler får vi

$$\sigma_C^T = \int\frac{r_0^2}{2}(1+\cos^2\theta)d\Omega = \frac{r_0^2}{2}\int_{-1}^{1}(1+\cos^2\theta)d(\cos\theta)\int_0^{2\pi}d\varphi = \frac{8\pi}{3}r_0^2.$$

c) For høye energier er totaltverrsnittet for Comptoneffekt

$$\sigma_C^T = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega_1}\left(\ln(\frac{2\hbar\omega_1}{mc^2}) + \frac{1}{2}\right).$$

En stråle av fotoner med energi 50 MeV sendes mot en tykk jernblokk. Finn hvor langt strålen går før Comptoneffekten har redusert intensiteten til det halve (neglisjer andre prosesser). Absorpsjonskoeffisienten er $\kappa = \rho_S \sigma^T$ der ρ_S er tettheten av spredende partikler og σ^T er det totale spredningstverrsnitt pr. spredende partikkel.

Intensiteten varierer som $I = I_0 e^{-\kappa x}$. Da er $I = I_0/2$ for $-\kappa x = \ln(\frac{1}{2})$ eller

$$x = \frac{\ln(2)}{\kappa}.$$

For jern er det i én cm^3 $\frac{\rho_{Fe} N_A}{A_{Fe}}$ atomer, eller for elektronene

$$\rho_S^e = Z\frac{\rho_{Fe} N_A}{A_{F_e}} = \frac{26 \cdot 7.874 \cdot 6.022 \cdot 10^{23}}{55.84} = 2.208 \cdot 10^{24} \text{ elektroner/cm}^3.$$

Tverrsnittet pr. elektron er

$$\sigma_C^T = \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega_1}\left(\ln(2\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}) + \frac{1}{2}\right) = 3.1416 \cdot (2.8179 \cdot 10^{-13})^2 \cdot \frac{0.511}{50}\left(\ln(\frac{2 \cdot 50}{0.511}) + \frac{1}{2}\right),$$

som gir

$$\sigma_C^T = 1.473 \cdot 10^{-26}\text{cm}^2 = 0.01473 \text{ b}.$$

Dermed blir halveringslengden

$$x = \frac{\ln(2)}{\kappa} = \frac{\ln(2)}{\rho_S^e \sigma_C^T} = \frac{0.6931}{2.208 \cdot 10^{24} \cdot 1.473 \cdot 10^{-26}} \text{ cm} = 21.3 \text{ cm}.$$

d) Totaltverrsnittet for parproduksjon av høyenergetiske fotoner på en kjerne med atomnummer Z er tilnærmet

$$\sigma_{PP}^T = \alpha Z^2 r_0^2 \left(\frac{28}{9}\ln(\frac{2\hbar\omega}{mc^2}) - \frac{218}{27}\right),$$

der α er gitt på forsiden. Finn forholdet mellom antall fotoner med energi 50 MeV som blir spredt av Comptoneffekt og de som blir absorbert av parproduksjon, i jern. Er det andre effekter som er viktige for fotonabsorpsjon ved denne energien?

Forholdet mellom reaksjonene Compton-spredning og parproduksjon er

$$\frac{\rho_{F_e}\sigma_C^T}{\rho_{F_e}^{\text{atomer}}\sigma_{pp}^T} = \frac{Z\rho_{F_e} N_A \sigma_C^T}{\rho_{F_e} N_A \sigma_{pp}^T} = \frac{Z\sigma_C^T}{\sigma_{pp}^T} = \frac{Z \cdot \pi r_0^2 \frac{mc^2}{\hbar\omega_1}(\ln(2\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}) + \frac{1}{2})}{\alpha Z^2 r_0^2(\frac{28}{9}\ln(2\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}) - \frac{218}{27})}$$

$$= \frac{\pi\frac{mc^2}{\hbar\omega_1}(\ln(2\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}) + \frac{1}{2})}{\alpha Z(\frac{28}{9}\ln(2\frac{\hbar\omega_1}{mc^2}) - \frac{218}{27})} = \frac{9\pi \cdot 0.511(\ln(\frac{2 \cdot 50}{0.511}) + \frac{1}{2})137}{50 \cdot 26(28\ln(\frac{2 \cdot 50}{0.511}) - \frac{218}{3})} = 0.1171.$$

En annen effekt er parproduksjon på elektroner. (Skjerming og Coulombkorreksjoner vil også modifisere tverrsnittene).

e) Vis at polarisasjonssummen $\sum_{\text{pol}}(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)^2$ gir resultatet som er gitt i punkt **a)**.

Polarisasjonssummen er

$$\sum_{\text{pol}}(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)^2 = \sum_{\text{pol } e_1}\sum_{\text{pol } e_2}(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)^2.$$

Velg $\boldsymbol{k}_1$ langs z-aksen og de to ortogonale polarisajonsvektorene $\boldsymbol{e}_1^{(1)} = \boldsymbol{e}_x$, $\boldsymbol{e}_1^{(2)} = \boldsymbol{e}_y$. Da er

$$\sum_{\text{pol } e_1}(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)^2 = (\boldsymbol{e}_2)_x^2 + (\boldsymbol{e}_2)_y^2.$$

Velg så $\boldsymbol{k}_2$ i xz- planet med en vinkel θ med $\boldsymbol{k}_1$, og velg

$$\boldsymbol{e}_2^{(1)} = \boldsymbol{e}_y, \quad \text{og} \quad \boldsymbol{e}_2^{(2)} = (\cos\theta, 0, -\sin\theta).$$

Da får en

$$\sum_{\text{pol}}(\boldsymbol{e}_1 \cdot \boldsymbol{e}_2)^2 = \sum_{\text{pol } e_2}(\boldsymbol{e}_2)_x^2 + (\boldsymbol{e}_2)_y^2 = 0 + 1 + \cos^2\theta + 0 = 1 + \cos^2\theta.$$

Oppgave 6. (Gitt av Ingjald Øverbø)

a) Skriv ned de relativistiske uttrykkene for energien E og impulsen $\boldsymbol{p}$ til en fri partikkel med (hvile-)masse m som beveger seg med hastigheten $\boldsymbol{v}$. Finn herav et uttrykk for $(E/c)^2 - \boldsymbol{p}^2$ (energi-impuls-relasjonen). Hva er den tilsvarende relasjonen for et foton?

Den frie partikkelens energi og impuls er

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \text{og} \quad \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

der c er lyshastigheten. Vi finner da at

$$\frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 = \frac{m^2(c^2 - v^2)}{1 - v^2/c^2} = m^2c^2,$$

som er energi-impuls-relasjonen for en partikkel med masse m. For et foton med masse null er energi-impuls-relasjonen tilsvarende

$$\frac{E_\gamma^2}{c^2} - \boldsymbol{p}_\gamma^2 = 0.$$

b) Vis at et fritt elektron ikke kan emittere et foton. [**Hint:** Vis at det er umulig å bevare både energi og impuls for (den tenkte) prosessen $e^- \to e^- + \gamma$.]

Dersom et fritt elektron skal kunne emittere et foton, krever energi- og impulsbevarelsen at

$$E \stackrel{?}{=} E' + E_\gamma \quad \text{og} \quad \boldsymbol{p} \stackrel{?}{=} \boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}_\gamma,$$

dvs

$$
\begin{aligned}
(m^2c^2 =)\ \frac{E^2}{c^2} - \boldsymbol{p}^2 \quad &\stackrel{?}{=} \quad (E' + E'_\gamma)^2/c^2 - (\boldsymbol{p}' + \boldsymbol{p}_\gamma)^2 && (18)\\
&= \quad \frac{(E')^2}{c^2} - (p')^2 + \frac{(E_\gamma)^2}{c^2} - (p_\gamma)^2 + 2\frac{E'E_\gamma}{c^2} - 2p'p_\gamma\cos\theta && (19)\\
&= \quad m^2c^2 + 0 + 2p_\gamma(E'/c - p'\cos\theta). && (20)
\end{aligned}
$$

Da $E'/c > p'$, ser vi at siste ledd på høyre side er positivt, slik at ligningen ikke kan være oppfylt, dvs prosessen er umulig.

c) Betrakt bremsestrålingsprosessen

$$e^- + \text{atomkjerne} \longrightarrow e^- + \text{atomkjerne} + \gamma,$$

der atomkjernen er i ro i begynnelsestilstanden. Angi impulsoverføringen $\boldsymbol{q}$ til atomkjernen uttrykt ved foton-impulsen $\hbar\boldsymbol{k}$ og elektronets impulser i begynnelses- og slutt-tilstandene, $\boldsymbol{p}_i$ og $\boldsymbol{p}_f$.
For ikke-relativistiske energier kan energibevarelsen i prosessen uttrykkes slik:

$$\frac{p_i^2}{2m_e} \approx \frac{p_f^2}{2m_e} + \hbar\omega_k \qquad (\omega_k = c|\boldsymbol{k}|).$$

Hvilket bidrag til energien i slutt-tilstanden er neglisjert i denne relasjonen (bortsett fra relativistiske korreksjoner), og hvorfor er dette en god approksimasjon? Hva er den maksimale energien til det emitterte fotonet?

Fra impulsbevarelsen, $\boldsymbol{p}_i + \boldsymbol{0} = \boldsymbol{p}_f + \boldsymbol{q} + \hbar\boldsymbol{k}$, følger at impulsoverføringen til atomkjernen (rekylen) er

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{p}_i - \boldsymbol{p}_f - \hbar\boldsymbol{k}.$$

I denne prosessen er den *kinetiske* energien bevart, siden det er er et masseløst *foton* som skapes. Følgelig har vi

$$\frac{p_i^2}{2m_e} + 0 = \frac{p_f^2}{2m_e} + \frac{q^2}{2M} + \hbar\omega_k,$$

der $\omega_k = c\boldsymbol{k}$ og M er kjernemassen. Siden denne er mye større enn elektronmassen m_e, kan rekylenergien $q^2/2M$ neglisjeres med god samvittighet. Det emitterte fotonet kan maksimalt stikke av med hele den kinetiske energien til primær-elektronet ($p_f = 0$), slik at $(\hbar\omega)_{\text{maks}} = p_i^2/2m_e$.

Tverrsnittet $d\sigma$ for bremsestrålingsprosessen ovenfor er proporsjonalt med kvadratet av

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M}_{fi} \quad &= \quad \langle\,\phi_f^0\,|V|\,\phi_i^0\,\rangle + \langle\,\phi_f^0\,|V\left(\sum_m \frac{|\,\phi_m^0\,\rangle\langle\,\phi_m^0\,|}{E_i - E_m}\right)V\,|\,\phi_i^0\,\rangle + \cdots\,, && (21)\\
&\equiv \quad \mathcal{M}_{fi}^{(1)} + \mathcal{M}_{fi}^{(2)} + \cdots\,. && (22)
\end{aligned}
$$

Her er vekselvirkningsoperatoren

$$V = V_C + \frac{e}{m_e}\boldsymbol{p}^{\text{op}}\cdot\boldsymbol{A} + \frac{e^2}{2m_e}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A},$$

der $V_C(r)$ er Coulomb-potensialet mellom elektronet og atomkjernen, og

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \sum_{r'\boldsymbol{k}'}\hat{\epsilon}_{r'\boldsymbol{k}'}\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V_0\omega_{k'}}}\left(a_{r'\boldsymbol{k}'}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}} + a^\dagger_{r'\boldsymbol{k}'}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}'\cdot\boldsymbol{r}}\right).$$

Med 3 ledd i V består $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ i prinsippet av 3 ledd. Tilsvarende består operatoren $V(\sum\cdots)V$ i uttrykket for $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ (og dermed $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ selv) av $3\times 3 = 9$ ledd.

d) Anta for et øyeblikk at V_C settes lik null (atomkjernen fjernes). De gjenværende leddene i $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ og $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ (altså de leddene som *ikke* inneholder V_C) er da alle lik null; disse leddene beskriver den umulige prosessen under punkt **b**). Forklar hvorfor også bidraget $\langle\, \phi_f^0 \,|V_C|\, \phi_i^0 \,\rangle$ til $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ er lik null. (**Hint:** Se på foton-delen av dette matrise-elementet.) Forklar også hvorfor operator-leddene $V_C(\sum\cdots)V_C$, $V_C(\sum\cdots)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ og $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}(\sum\cdots)V_C$ ikke bidrar til $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$.

Siden V_C ikke inneholder operatorer som påvirker fotontallet, blir fotondelen av dette matrise-elementet

$$\langle\, \phi_f^0 \,|V_C|\, \phi_i^0 \,\rangle \;\propto\; \langle \cdots 1_{rk} \cdots | \cdots 0_{rk} \cdots \rangle = 0, \quad \text{q.e.d.},$$

slik at alle de tre leddene i $\mathcal{M}_{fi}^{(1)}$ er lik null. De fem leddene i operatoren $V(\sum\cdots)V$ som inneholder V_C er

$V_C(\sum\cdots)V_C$,

$V_C(\sum\cdots)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$,

$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}(\sum\cdots)V_C$,

$(e/m_e)\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}(\sum\cdots)V_C$ og

$V_C(\sum\cdots)(e/m_e)\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}$.

Det første leddet gir null fordi denne operatoren ikke skaper det nødvendige fotonet i slutt-tilstanden. De to neste er lik null fordi operatoren $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$ generelt endrer fotontallet med 0 eller ± 2.

I de to siste vil operatoren $\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A}$ generelt endre fotontallet med ± 1, og her (via $a_{rk}^\dagger$-leddet i $\boldsymbol{A}$) skape det nødvendige $r\boldsymbol{k}$-fotonet.

e) Hvert av de to leddene i $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$ som *ikke* er lik null kan skrives som et dobbelt-integral. Det ene av disse [som svarer til kombinasjonen $(e/m_e)\boldsymbol{p}^{\rm op}\cdot\boldsymbol{A}(\sum\cdots)V_C$ i uttrykket $V(\sum\cdots)V$] kan skrives slik:

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2a)} = \int \mathrm{d}^3 r_1 \int \mathrm{d}^3 r_2 \quad \psi_{\boldsymbol{p}_f}^*(\boldsymbol{r}_1)\left(\frac{e}{m_e}\,\hat{\epsilon}_{r\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{p}_f\sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V_0\omega_k}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1}\right)\times$$
$$\times\;\sum_m \frac{\psi_{\boldsymbol{p}_m}(\boldsymbol{r}_1)\psi_{\boldsymbol{p}_m}^*(\boldsymbol{r}_2)}{E_i - E_m}\,V_C(\boldsymbol{r}_2)\,\psi_{\boldsymbol{p}_i}(\boldsymbol{r}_2).$$

Forklar (ut fra integralet over $\boldsymbol{r}_1$) hvorfor summen over m gir bare ett bidrag, og angi verdiene av impulsen $\boldsymbol{p}_m$ og energien E_m for dette bidraget. [**Hint:** Bølgefunksjonene $\psi_{\boldsymbol{p}_i}(\boldsymbol{r})$ osv er av typen $V_0^{-1/2}\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{p}_i\cdot\boldsymbol{r}/\hbar)$, hvor V_0 er normeringsvolumet.]

Integralet

$$\int \mathrm{d}^3 r_1 \psi_{\boldsymbol{p}_f}^*(\boldsymbol{r}_1)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_1}\,\psi_{\boldsymbol{p}_m}(\boldsymbol{r}_1)$$

bevarer impuls, i den forstand at det er lik 1 for den ene impulsen $\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{p}_f + \hbar\boldsymbol{k}$ og null ellers. Da "mellomtilstanden" $|\,\phi_m^0\,\rangle$ her er fri for fotoner, er

$$E_m = \frac{p_m^2}{2m_e} = \frac{(\boldsymbol{p}_f + \hbar\boldsymbol{k})^2}{2m_e}.$$

f) Skriv ned et dobbeltintegral, tilsvarende det som er oppgitt ovenfor, for det *andre* leddet ($\mathcal{M}_{fi}^{(2b)}$) som bidrar til $\mathcal{M}_{fi}^{(2)}$. [Dette leddet svarer til kombinasjonen

$$V_C(\sum\cdots)(e/m_e)\boldsymbol{p}^{\rm op}\cdot\boldsymbol{A}$$

i uttrykket $V(\sum \cdots)V]$. Hva blir $\boldsymbol{p}_m$ i dette leddet? Hva blir E_m?

I leddet

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2b)} = \langle \phi_f^0 | V_C \left(\sum_m \frac{|\phi_m^0\rangle\langle\phi_m^0|}{E_i - E_m} \right) \frac{e}{m_e} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{p} \, | \phi_i^0 \rangle$$

kan vi erstatte operatoren $\boldsymbol{p}$ med $\boldsymbol{p}_i$ (for begynnelsestilstanden). Her ser vi at operatoren $\boldsymbol{A}$ først skaper fotonet, "hvoretter" V_C sørger for den nødvendige impulsoverføringen til elektronet $(-\boldsymbol{q})$. Dvs at mellomtilstanden inneholder fotonet. Resultatet blir da

$$\mathcal{M}_{fi}^{(2b)} = \int \mathrm{d}^3 r_1 \int \mathrm{d}^3 r_2 \;\; \psi_{\boldsymbol{p}_f}^*(\boldsymbol{r}_1) V_C(\boldsymbol{r}_1) \sum_m \frac{\psi_{\boldsymbol{p}_m}(\boldsymbol{r}_1)\psi_{\boldsymbol{p}_m}^*(\boldsymbol{r}_2)}{E_i - E_m} \times$$
$$\times \left(\frac{e}{m_e} \hat{\epsilon}_{r\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{p}_i \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 V_0 \omega_k}} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}_2} \right) \psi_{\boldsymbol{p}_i}(\boldsymbol{r}_2).$$

Her gir integralet over $\boldsymbol{r}_2$ impulsen $\boldsymbol{p}_m = \boldsymbol{p}_i - \hbar \boldsymbol{k}$. Mellomtilstanden inneholder nå som sagt fotonet, slik at

$$E_m = \frac{(\boldsymbol{p}_i - \hbar\boldsymbol{k})^2}{2m_e} + \hbar\omega_k.$$

Oppgitt: $a|\,n\,\rangle = \sqrt{n}\,|\,n-1\,\rangle, \qquad a^\dagger|\,n\,\rangle = \sqrt{n+1}\,|\,n+1\,\rangle.$