NTNU **Institutt for fysikk**

Løsningsforslag til eksamen i

FY8401/FY8410/VUF4001 IONISERENDE STRÅLINGS VEKSELVIRKNING MED MATERIE

Onsdag 15. desember 2004

Dette løsningsforslaget er på 6 sider.

Oppgave 1. (Gitt av Tor Wøhni)

a) Definér eller forklar betydningen av begrepet "midlere ionisasjons- og eksitasjonspotensial", I.

b) Beskriv hvordan Cerenkov-stråling oppstår, og beregn hvilken mimimumsenergi et elektron må ha for å produsere Cerenkov-stråling i vann. Brytningsindeksen for vann er 1,33.

c) Vis i et diagram skjematisk hvordan kollisjons-stoppingpower S_{col}/ρ og strålings-stoppingpower S_{rad}/ρ for elektroner varierer som funksjon av energien. Bruk f.eks materialene wolfram og vann, og forklar kurveforløpene.

Oppgave 2. (Gitt av Tor Wøhni)

a) Forklar begrepet "mass scattering power", og sett opp ICRU's uttrykk for denne størrelsen.

b) Forklar hvordan mass scattering power varierer med sprederens atomnummer og den aktuelle elektronenergi.

c) Beregning av mass scattering power kan i prinsippet gjøres vha Rutherfordtverssnittet for "single-scatter". Hvilke regnetekniske problemer medfører dette, og hvilke fysiske forutsetninger kan man sette for å omgå problemet?

Oppgave 3. (Gitt av Jan Blomgren)

Beskriv de viktigste teknikkene for å moderere nøytroner. Hvilke materialer brukes?

Oppgave 4. (Gitt av Kåre Olaussen)

Et kvalitativt overslag på grunntilstandsenergien til hydrogenlignenede atomer kan finnes fra energifunksjonen $E(\rho) = T(\rho) + V(\rho)$, med estimatene

$$T(\rho) = \frac{\hbar^2}{2m_e\rho^2}, \quad V(\rho) = -\frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0\rho}, \tag{1}$$

når ρ er den typiske størrelsen til atomet.

a) Skisser hvordan det kan argumenteres for estimatet for $T(\rho)$ ved bruk av Heisenberg's usikkerhetsrelasjon,

$$\Delta p_i \Delta r_i \geq \frac{1}{2}\hbar, \qquad \text{der } \Delta p_i = \sqrt{\langle p_i^2\rangle - \langle p_i\rangle^2}, \text{ og } \Delta r_i = \sqrt{\langle r_i^2\rangle - \langle r_i\rangle^2}. \tag{2}$$

En kvantemekanisk partikkel som er lokalisert til et område av lineær utstrekning ρ (og derfor har en posisjonsusikkerhet av størrelsesorden ρ eller mindre) må ifølge ligning (2) ha en usikkerhet i bevegelsesmengden av størrelsesorden $\Delta p_i \approx \hbar/2\rho$ (eller større). For stasjonære tilstander, der $\langle p_i\rangle = 0$, blir derfor $\boldsymbol{p}^2 = \sum_{i=1}^{3}(\Delta p_i)^2 \approx \hbar^2/\rho^2$. Dette leder til overslaget

$$T(\rho) = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m_e} \approx \frac{\hbar^2}{2m_e\rho^2}. \tag{3}$$

b) La $\rho_{\min}$ være den verdien av ρ som minimaliserer $E(\rho)$.

- Hvordan avhenger utstrekningen til grunntilstanden, $\rho_{\min}$, av kjerneladningen Z?

  Energioverslaget er

  $$E(\rho) \approx \frac{A}{\rho^2} - \frac{Z\,B}{\rho}, \tag{4}$$

  der A og B er kombinasjoner av naturkonstanter. Minimering med hensyn på ρ gir

  $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}E(\rho) = -\frac{2A}{\rho^3} + \frac{Z\,B}{\rho^2} = 0,$$

  dvs. at

  $$\rho_{\min} \sim Z^{-1}. \tag{5}$$

- Hvordan avhenger grunntilstandsenergien $E_{\min} \equiv E(\rho_{\min})$ av kjerneladningen Z?

  Ved innsetting av (5) i ligning (4) ser vi at

  $$E(\rho_{\min}) \sim Z^2. \tag{6}$$

c) Sett $Z = 1$ og finn de fullstendige uttrykkene for $\rho_{\min}$ og $E_{\min}$. Uttrykk svarene ved finstrukturkonstanten $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}$, elektronets Comptonbølgelengde $r_e = \frac{\hbar}{m_e c}$, og elektronets hvilemasse $m_e c^2$.

Vi finner

$$\rho_{\min} = \frac{2A}{B} = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e\,e^2} = \frac{\hbar}{m_e c}\,\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar c}{e^2} = r_e\,\alpha^{-1}, \tag{7}$$

og

$$E(\rho_{\min}) = \frac{A}{\rho_{\min}^2} - \frac{B}{\rho_{\min}} = -\frac{B^2}{4A} = -\frac{1}{2}\frac{m_e e^4}{(4\pi\varepsilon_0\hbar)^2} = -\frac{1}{2}\alpha^2 m_e c^2. \tag{8}$$

d) Ved fotoelektrisk effekt observerer man absorpsjonskanter (en diskontinuerlig økning i absorpsjonstverrsnittet $\sigma_{\text{p.e}}$) når fotonet akkurat har nok energi til å frigjøre elektronet fra en bundet tilstand. Bruk resultatet fra foregående punkt til å estimere K-absorpsjonskanten for jern. Angi svaret i keV.

K-absorpsjonskanten svarer til at man sparker ut et elektron fra grunntilstanden; dette krever omtrent en fotonenergi

$$E_K \approx \frac{1}{2}Z_{\text{Fe}}^2\alpha^2 m_e c^2 \approx 9.2\ \text{keV}. \tag{9}$$

Ved spontan emisjon er den differensielle sannsynligheten for overganger til en tilstand der fotonet har energi $\hbar\omega_\gamma = E_\mathrm{i} - E_\mathrm{f}$ og retning $\hat{p}_\gamma = \sin\vartheta\cos\varphi\hat{e}_x + \sin\vartheta\sin\varphi\hat{e}_y + \cos\vartheta\hat{e}_z$ gitt som

$$\mathrm{d}^2 w_\mathrm{fi} = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}\right)\frac{\omega_\gamma^3}{c^2}\,|\boldsymbol{x}_\mathrm{fi}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\mathrm{r}}|^2\,\frac{\mathrm{d}^2\Omega_\gamma}{2\pi}. \tag{10}$$

der $\boldsymbol{x}_\mathrm{fi} = \int \mathrm{d}^3x\;\psi_\mathrm{f}^*(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{x}\,\psi_\mathrm{i}(\boldsymbol{x})$.

e) Verifiser at ligning (10) er dimensjonsmessig korrekt, dvs. at $\mathrm{d}^2 w_\mathrm{fi}$ har dimensjon s^{-1}.

Faktorene $(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c})$ og $\frac{\mathrm{d}^2\Omega_\gamma}{2\pi}$ er dimensjonsløse, ω_γ^3 har dimensjon s^{-3}, c^{-2} har dimensjon $\mathrm{s}^2\mathrm{m}^{-2}$, og $|\boldsymbol{x}_\mathrm{fi}\cdot\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{k},\mathrm{r}}|^2$ har dimensjon m^2. Derfor har $\mathrm{d}^2 w_\mathrm{fi}$ dimensjon $\mathrm{s}^{-3}\,\mathrm{s}^2\mathrm{m}^{-2}\,\mathrm{m}^2 = \mathrm{s}^{-1}$.

f) Hvordan tror du levetiden til f.eks. $2p_z$-tilstanden i et hydrogenlignende atom vil avhenge av kjerneladningen Z?

Her vil ω_γ skalere som energisplittingen, dvs. proporsjonalt med Z^2 og $\boldsymbol{x}_\mathrm{fi}$ som atomets utsrekning, dvs. proporsjonalt med Z^{-1}. Derfor vil overgangsraten $\mathrm{d}^2 w_\mathrm{fi}$ skalere som $Z^{6-2} = Z^4$, og levetiden som Z^{-4}.

Oppgave 5. (Gitt av Ingjald Øverbø)

a) Skriv ned de relativistiske uttrykkene for energien E og impulsen $\mathbf{p}$ til en fri partikkel med (hvile-)masse m som beveger seg med hastigheten $\mathbf{v}$. Finn herav et uttrykk for $(E/c)^2 - \mathbf{p}^2$ (energi-impuls-relasjonen). Hva er den tilsvarende relasjonen for et foton?

Den frie partikkelens energi og impuls er

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \qquad \text{og} \qquad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$$

der c er lyshastigheten. Vi finner da at

$$\frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \frac{m^2(c^2 - v^2)}{1 - v^2/c^2} = m^2c^2,$$

som er energi-impuls-relasjonen for en partikkel med masse m. For et foton med masse null er energi-impuls-relasjonen tilsvarende

$$\frac{E_\gamma^2}{c^2} - \mathbf{p}_\gamma^2 = 0.$$

b) Betrakt en parproduksjonsprosess der et foton absorberes i feltet fra en atomkjerne (som er i ro), og det dannes et positron-elektron-par med energier E_+ og E_-. Sett opp ligningene for impuls- og energibevarelse. (Dvs $\mathbf{p}_\gamma$ uttrykt ved $\mathbf{p}_+$, $\mathbf{p}_-$ og $\mathbf{q}$, og E_γ uttrykt ved E_+ og E_-. Her er $\mathbf{q}$ rekylimpulsen til kjernen). Neglisjer rekylenergien til kjernen.

Ligningen for impulsbevarelse er

$$\mathbf{p}_\gamma = \mathbf{p}_+ + \mathbf{p}_- + \mathbf{q}\,,$$

der $\mathbf{q}$ er impulsen til kjernen (som var i ro før prosessen). Ligningen for energibevarelse blir tilsvarende

$$E_\gamma + Mc^2 = E_+ + E_- + Mc^2 + \frac{q^2}{2M},$$

der det siste beløpet er rekylenergien til kjernen. Når denne neglisjeres, har vi altså

$$E_\gamma = E_+ + E_-.$$

c) Rekyl-*impulsen* ($\mathbf{q}$) til kjernen kan *ikke* neglisjeres. Vis dette ved å anta motsatsen, dvs at $\mathbf{q} = 0$. [Hint: Sett $\mathbf{q} = 0$, uttrykk $E_\gamma^2/c^2 - \mathbf{p}_\gamma^2$ ved de andre størrelsene, og konkludér ut fra dette.]

Prøver vi nå å sette rekylimpulsen $\mathbf{q}$ lik null, har vi fra ligningene ovenfor

$$(\frac{E_\gamma}{c})^2 - \mathbf{p}_\gamma^2 = ... = (\frac{E_+}{c})^2 - \mathbf{p}_+^2 + (\frac{E_-}{c})^2 - \mathbf{p}_-^2 + 2(\frac{E_+E_-}{c^2} - p_+p_- \cos\theta_{+-}) \quad (11)$$

$$= 2m_e^2c^2 + 2(\frac{E_+E_-}{c^2} - p_+p_- \cos\theta_{+-}). \quad (12)$$

Her er også det siste leddet positivt, fordi $E_+/c = \sqrt{m_e^2c^2 + p_+^2} > p_+$, osv. Følgelig er relasjonen

$$(\frac{E_\gamma}{c})^2 - \mathbf{p}_\gamma^2 = 0$$

ikke oppfylt, dvs prosessen er kinematisk umulig (uten at en impuls $\mathbf{q}$ overføres til f.eks en atomkjerne). Parproduksjonsprosessen $\gamma \to e^+ + e^-$ i vakuum er altså kinematisk umulig.

d) Hva er terskelenergien, $(E_\gamma)_{\rm min}$, når parproduksjonen skjer på en tung partikkel som en atomkjerne? Hvor stor er impulsoverføringen $|\mathbf{q}|$ til kjernen ved terskelen? Påvis at rekylenergien til kjernen er neglisjerbar ved terskelen.

Ved "terskelen" er E_γ akkurat stor nok til å skape et e^+e^--par med $\mathbf{p}_+ = \mathbf{p}_- = 0$, dvs vi har en terskelenergi

$$(E_\gamma)_{\rm min} \equiv E_t = 2m_ec^2 = 1.022 \text{ MeV}.$$

Impulsoverføringen til kjernen ved terskelen er

$$q_t = |\mathbf{q}_t| = p_\gamma = \frac{E_t}{c} = 1.022 \text{ MeV}/c.$$

Dette svarer til en rekylenergi

$$E_{\rm rek} = \frac{q_t^2}{2M} = \frac{E_t^2}{2Mc^2} = 1.022 \text{ MeV} \cdot \frac{m_e}{M},$$

der forholdet mellom elektronmassen m_e og kjernemassen M er svært lite (=1/1840 når kjernen er et proton, og enda mindre for tyngre kjerner). Rekylenergien kan derfor neglisjeres ved terskelen, slik vi har gjort ovenfor. Det kan vises at dette gjelder også ved høyere energier.

e) Når en "prosjektil"-partikkel med masse m og ladning $+e$ (eller $-e$) kolliderer med en (uendelig tung) atomkjerne med ladning Ze, sier (den klassiske og ikke-relativistiske) Larmor-formelen at den utstrålte effekten er proporsjonal med kvadratet av akselerasjonen. Bruk dette til å argumentere kvalitativt for hvordan bremsestrålingstverrsnittet avhenger av Z og m.

Ifølge Newton og Coulomb utsettes prosjektilet for akselerasjonen

$$a = \frac{F}{m} = \pm\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{Z}{mr^2}$$

under kollisjonen. Ifølge den ikke-relativistiske Larmor-formelen gir dette en utstrålt effekt proporsjonal med a^2, dvs med

$$\frac{Z^2}{m^2}\frac{1}{r^4},$$

der r selvsagt vil variere under kollisjonen. Dette klassiske resonnementet indikerer at tverrsnittet for bremsestråling er proporsjonalt med Z^2 og omvendt proporsjonalt med m^2, hvilket faktisk er korrekt i Born-tilnærmelsen.

f) Det ikke-relativistiske tverrsnittet for fotoelektrisk emisjon av et elektron fra et *hydrogenlignende* atom kan i Born-tilnærmelsen skrives på formen

$$\sigma_{\gamma,e} = \frac{256}{3}\,\alpha\pi\left(\frac{a_B}{Z}\right)^2\left(\frac{E_B}{E_\gamma}\right)^{7/2}.$$

Hva står symbolene α, a_B, Z, E_B og E_γ i dette uttrykket for?

Symbolet α står for finstrukturkonstanten, $\approx 1/137$ ($= e^2/4\pi\varepsilon_0\hbar c$ for den som husker uttrykket). a_B står for Bohr-radien, $\approx 0.5\times 10^{-10}$ m ($= 4\pi\varepsilon_0\hbar^2/m_e e^2$ for den som husker uttrykket). Z er atomnummeret. (Og a_B/Z er "radien" til grunntilstanden i det hydrogenlignende atomet, for den som husker det.) E_B er bindingsenergien, og E_γ er foton-energien.

Oppgave 6. (Gitt av Kjell Mork)

a) Et legeme består av ustabile atomer. Overgangssannsynligheten pr. sekund og pr. atom for desintegrasjonsprosessen er w_{fi}. Hva er levetiden τ for atomet?

Av N atomer desintegrerer i løpet av tiden dt

$$dN = -w_{fi}N\,dt.$$

Integrasjon gir

$$N = N_0 e^{-w_{fi}t} = N_0 e^{-t/\tau},$$

der $\underline{\tau = 1/w_{fi}}$ er levetiden. [Halveringstiden blir da $\tau_{1/2} = \tau\ln 2$.]

b) For radium er levetiden 2308 år. En bit radium veier 1 gram. Hvor mange desintegrasjoner skjer pr. sekund i radiumbiten?

I A gram radium er det N_A atomer, så i ett gram er det N_A/A atomer. Antall desintegrasjoner pr. sekund blir derfor

$$\frac{dN}{dt} = w_{fi}N = \frac{N}{\tau} = \frac{N_A}{A\,\tau} = \frac{6.022\cdot 10^{23}}{226.02\cdot 2308\cdot 365\cdot 24\cdot 3600} = 3.66\cdot 10^{10}.$$

c) Hvor lang tid tar det før antallet radiumkjerner er redusert til en firedel av det opprinnelige antallet?

Fra formelen $N(t) = N_0 e^{t/\tau}$ ser vi at $N(t)$ er redusert til $N_0/4$ etter tiden

$$t = \tau\ln 4 = 2308 \text{ år}\cdot 1.3863 = 3200 \text{ år}.$$

Enda enklere er det å notere seg at antall gjenværende radiumkjerner er en firedel av det opprinnelige antallet etter to halveringstider, $t = 2\tau_{1/2} = 2\cdot 1600$ år.

d) Radiumbiten ligger skjermet av et materiale som har absorpsjonskoeffisient $\kappa = 21\ \mathrm{cm}^{-1}$ for absorpsjon av α-partiklene som radiumet emitterer. Skjermingen har tykkelse $d = 3$ mm. Hvor stor del av α-partiklene passerer skjermingen?

Absorpsjon reduserer intensiteten I som

$$I = I_0 e^{-\kappa x}.$$

Med en tykkelse $d = 3$ mm av skjermingen finner vi altså at brøkdelen av α-partiklene som passerer skjermingen er

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\kappa d} = e^{-21 \cdot 0.3} = e^{-6.3} = 0.001836.$$

Oppgitt:

Atomvekt for radium: $A_{\mathrm{Ra}} = 226.02$,

Halveringstid for radium: $\tau_{1/2} = 1600$ år.

Constant	**Symbol**	**Value**
Atomic mass unit	u	1.6606×10^{-27} kg
Avogadro's constant	N_A	$6.0220 \times 10^{26}\ \mathrm{kmol}^{-1}$
Bohr magneton	μ_B	$9.2741 \times 10^{-24}\ \mathrm{J\,T^{-1}}$
Bohr radius	a_0	5.2918×10^{-11} m
Boltzmann constant	k	$1.3807 \times 10^{-23}\ \mathrm{J\,K^{-1}}$
Electron charge	e	1.6022×10^{-19} C
Fine structure constant	α	7.2974×10^{-3}
Electron radius	r_0	2.8179×10^{-15} m
Electron rest mass	m_e	9.1095×10^{-31} kg
Electron rest energy	$m_\mathrm{e}c^2$	0.5110 MeV
Proton rest mass	m_p	1.6726×10^{-27} kg
Neutron rest mass	m_n	1.6749×10^{-27} kg
Planck constant	h	6.6261×10^{-34}Js
Planck constant (reduced)	$\hbar$	1.0546×10^{-34}Js
Vacuum speed of light	c	$2.9979 \times 10^{8}\ \mathrm{m\,s^{-1}}$
Vacuum permeability	μ_0	$1.2566 \times 10^{-6}\ \mathrm{H\,m^{-1}}$
Vacuum permittivity	ε_0	$8.8542 \times 10^{-12}\ \mathrm{C^2\,J^{-1}\,m^{-1}}$
Atomic weight of iron	A_Fe	55.84
Atomic number of iron	Z_Fe	26
Density of iron	ρ_Fe	$7.874 \times 10^{3}\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$