**Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet**
**Institutt for fysikk,**

**BOKMÅL**

EKSAMEN I: ~~MNFFY100 - GENERELL FYSIKK I~~ MNFFY202- Systemdynamikk

DATO: MANDAG 19. MAI 2000

TID: 09.00 - 15.00

Antall vekttall: 3

Antall sider: 6

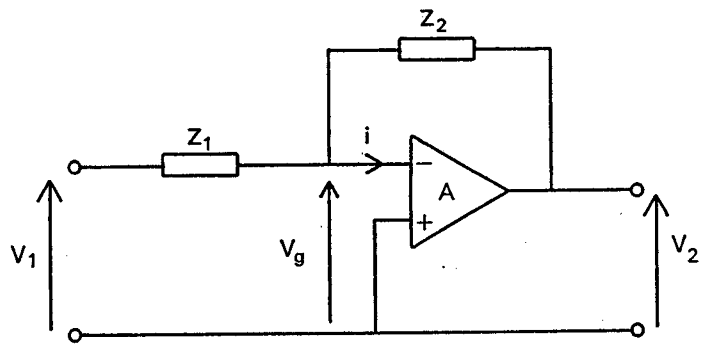
Tillatte hjelpemidler:
Matematiske tabeller,
kalkulator

Sensur dato: 16. juni 2000

---

**Oppgave 1.**

For å simulere overføringsfunksjoner (transfer-funksjoner) brukes ofte en operasjonsforsterker. Den kobles da opp i følgende krets:

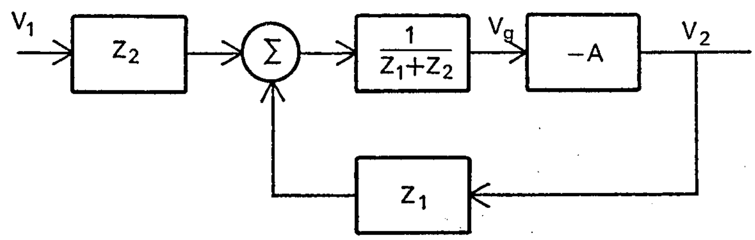



Hvis vi bruker innspenningen $V_g$ og utgangen $V_2$ som henholdsvis inn- og utgangssignal, så blir overføringsfunksjonen:

$$A(s) = - A$$

dvs. $V_2 = -A \cdot V_g$. Forsterkningen A er som regel svært stor.

a.
Vis at koblingen som er beskrevet i figuren ovenfor kan representeres med følgende blokkskjema:



b.
Utled overføringsfunksjonen $G(s) = V_2(s) / V_1(s)$ i den ovenstående figuren og vis at den vil nærme seg $- Z_2(s) / Z_1(s)$ for $A(s) \rightarrow \infty$.

c.
Diskuter og lag en graf hvor du beskriver frekvensavhengigheten til G(s) for de tilfellet at $Z_2$ er en resistans i parallel med en kapasitans. $Z_1$ settes lik en resistans. Bemerk at for det tilfellet at $Z_1$ er en resistans og $Z_2$ er en enkel kapasitans, så vil overføringsfunksjonen tilsvare en integrator.

d.
Systemets følsomhet for endringer i A(s), $S_A$, kan defineres som:

$$S_A = (dG/G) / (dA/A)$$

Drøft $S_A$ med forutsetningene $Z_2/Z_1 = 100$, dvs. en forsterkning på 100 ganger, og A(s) = konstant = $10^5$. Hvis overføringsfunksjonen A(s) endrer seg med 10%, hvor mye vil da G(a), overføringsfunksjonen for det lukkede systemet, endre seg?

**Oppgave 2.**

Vi skal i denne oppgaven diskutere en modell for en dødelig infeksjonssykdom.

Av en befolkning på N personer har x ennå ikke hatt sykdommen. y personer er syke og samtidig smittefarlige.

a.
Beskriv de antagelsene som vi har benyttet for å komme fram til følgende ikkelineære modell for dette systemet:

$$\begin{cases} dx/dt = -\alpha x y \\ dy/dt = \alpha x y - \beta\beta y \end{cases}$$

b.
Lineariser modellen under forutsetning av at $y << x$ og at

$$x = x_0 + x_1, \qquad x_1 << x_0$$

Verdiene $x_0$ og $y_0$ er verdiene av x og y i tidspunktet $t=t_0$, og antas å være kjent.

Bestem $x_1(t)$ og $y(t)$ fra denne lineariserte modellen, og drøft løsningen. Drøft også hvordan $\alpha$ og $\beta$ kan bestemmes fra data ved begynnelsen av epidemien. Bruk som et eksempel:

$$\alpha x_0 = 1 \text{ (year)}^{-1}$$
$$\beta = 0.5 \text{ (year)}^{-1}$$

i løsningen for den begrensede løsningen (x og y er små).

c.
Tegn baner i tilstandsrommet for dette systemet, basert på ligningene som er diskutert i a). Forklar hva disse kurvene forteller oss om spredningen av sykdommen. Bruk forholdet $c = \beta / \alpha$ som hjelpevariabel. Pass spesielt på å få med banen som beskrives ved parametersettet brukt i b).

Hvis mulig, gi en kommentar om relevansen til denne modellen, for eksempel i forhold til en AIDS-epidemi.

## Oppgave 3

Et termisk system er beskrevet med følgende to ligninger:

$$C\, dT/dt + a\,(T - T_0) + z(t) = P$$

$$z(t) \begin{cases} 0 & t < 0 \\ z_0[1 - \cos(\omega \cdot t)] & t > 0 \end{cases}$$

hvor T er temperatur, $T_0$ er omgivelsestemperaturen og z(t) tilsvarer en termisk belastning som påvirker systemet. $T_r$ kan brukes som betegnelse på en referansetemperatur. T kan settes lik $T_0$ for $t < 0$.

Drøft de fysiske variablene som er representert med konstantene "C" og "a", samt de termene hvor de er faktorer.

Beskriv en PI-regulator strategi for å holde systemet så nær som mulig opptil en (konstant) temperatur $T_r$ for $t > 0$. Foreslå koeffisienter til denne PI-kontrolleren som sikrer at maksimum temperaturavvik, uavhengig av frekvens, er $(\Delta T)_{max} = 0.1$ K i stasjonær tilstand. Forutsett her at $z_0 = 1$ W, C = 1000 J/K og a = 1 W/K.

Valg av disse koeffisientene bestemmer også tidskonstanten for oppførselen ved et sprang i temperatur til en ny referansetemperatur, $T_r$. Finn denne tidskonstanten og skisser systemresponsen ved et slikt sprang.

| | $F(t)$ | $f(s)$ |
|---|---|---|
| 1 | $F(t)$ | $\int_0^\infty e^{-st}F(t)\,dt$ |
| 2 | $AF(t) + BG(t)$ | $Af(s) + Bg(s)$ |
| 3 | $F'(t)$ | $sf(s) - F(+0)$ |
| 4 | $F^{(n)}(t)$ | $s^n f(s) - s^{n-1}F(+0) - s^{n-2}F'(+0) - \cdots - F^{(n-1)}(+0)$ |
| 5 | $\int_0^t F(\tau)\,d\tau$ | $\frac{1}{s} f(s)$ |
| 6 | $\int_0^t \int_0^\tau F(\lambda)\,d\lambda\,d\tau$ | $\frac{1}{s^2} f(s)$ |
| 7 | $\int_0^t F_1(t-\tau)F_2(\tau)\,d\tau = F_1 * F_2$ | $f_1(s)\,f_2(s)$ |
| 8 | $tF(t)$ | $-f'(s)$ |
| 9 | $t^n F(t)$ | $(-1)^n f^{(n)}(s)$ |
| 10 | $\frac{1}{t} F(t)$ | $\int_s^\infty f(x)\,dx$ |
| 11 | $e^{at}F(t)$ | $f(s-a)$ |
| 12 | $F(t-b)$, where $F(t) = 0$ when $t < 0$ | $e^{-bs}f(s)$ |
| 13 | $\frac{1}{c} F\left(\frac{t}{c}\right)$ | $f(cs)$ |
| 14 | $\frac{1}{c} e^{(bt)/c} F\left(\frac{t}{c}\right)$ | $f(cs - b)$ |
| 15 | $F(t+a) = F(t)$ | $\dfrac{\int_0^a e^{-st}F(t)\,dt}{1 - e^{-as}}$ |
| 16 | $F(t+a) = -F(t)$ | $\dfrac{\int_0^a e^{-st}F(t)\,dt}{1 + e^{-as}}$ |
| 17 | $F_1(t)$, the half-wave rectification of $F(t)$ in No. 16 | $\dfrac{f(s)}{1 - e^{-as}}$ |
| 18 | $F_2(t)$, the full-wave rectification of $F(t)$ in No. 16 | $f(s) \coth \frac{as}{2}$ |
| 19 | $\sum_1^m \frac{p(a_n)}{q'(a_n)} e^{a_n t}$ | $\frac{p(s)}{q(s)}$, $q(s) = (s-a_1)(s-a_2)\cdots(s-a_m)$ |
| 20 | $e^{at}\sum_{n=1}^{r} \frac{\phi^{(r-n)}(a)}{(r-n)!}\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots$ | $\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{\phi(s)}{(s-a)^r}$ |

[1]These tables of Laplace Operations ... [illegible]



## LAPLACE TRANSFORMS

| | $f(s)$ | $F(t)$ |
|---|---|---|
| 1 | $\frac{1}{s}$ | $1$ |
| 2 | $\frac{1}{s^2}$ | $t$ |
| 3 | $\frac{1}{s^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ | $\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$ |
| 4 | $\frac{1}{\sqrt{s}}$ | $\frac{1}{\sqrt{\pi t}}$ |
| 5 | $s^{-3/2}$ | $2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$ |
| 6 | $s^{-[n+(1/2)]}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ | $\frac{2^n t^{n-(1/2)}}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)\sqrt{\pi}}$ |
| 7 | $\frac{\Gamma(k)}{s^k}$ $(k \geq 0)$ | $t^{k-1}$ |
| 8 | $\frac{1}{s-a}$ | $e^{at}$ |
| 9 | $\frac{1}{(s-a)^2}$ | $te^{at}$ |
| 10 | $\frac{1}{(s-a)^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ | $\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}e^{at}$ |
| 11 | $\frac{\Gamma(k)}{(s-a)^k}$ $(k \geq 0)$ | $t^{k-1}e^{at}$ |
| 12* | $\frac{1}{(s-a)(s-b)}$ | $\frac{1}{a-b}(e^{at} - e^{bt})$ |
| 13* | $\frac{s}{(s-a)(s-b)}$ | $\frac{1}{a-b}(ae^{at} - be^{bt})$ |
| 14* | $\frac{1}{(s-a)(s-b)(s-c)}$ | $-\frac{(b-c)e^{at} + (c-a)e^{bt} + (a-b)e^{ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)}$ |
| 15 | $\frac{1}{s^2+a^2}$ | $\frac{1}{a}\sin at$ |
| 16 | $\frac{s}{s^2+a^2}$ | $\cos at$ |
| 17 | $\frac{1}{s^2-a^2}$ | $\frac{1}{a}\sinh at$ |
| 18 | $\frac{s}{s^2-a^2}$ | $\cosh at$ |

*Here $a$, $b$, and (in 14) $c$ represent distinct constants.

(4)

## LAPLACE TRANSFORMS (Continued)

| | $f(s)$ | $F(t)$ |
|---|---|---|
| 19 | $\dfrac{1}{s(s^2+a^2)}$ | $\dfrac{1}{a^2}(1-\cos at)$ |
| 20 | $\dfrac{1}{s^2(s^2+a^2)}$ | $\dfrac{1}{a^3}(at-\sin at)$ |
| 21 | $\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$ | $\dfrac{1}{2a^3}(\sin at-at\cos at)$ |
| 22 | $\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$ | $\dfrac{t}{2a}\sin at$ |
| 23 | $\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$ | $\dfrac{1}{2a}(\sin at+at\cos at)$ |
| 24 | $\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$ | $t\cos at$ |
| 25 | $\dfrac{s}{(s^2+a^2)(s^2+b^2)}\ (a^2\neq b^2)$ | $\dfrac{\cos at-\cos bt}{b^2-a^2}$ |
| 26 | $\dfrac{1}{(s-a)^2+b^2}$ | $\dfrac{1}{b}e^{at}\sin bt$ |
| 27 | $\dfrac{s-a}{(s-a)^2+b^2}$ | $e^{at}\cos bt$ |
| 27.1 | $\dfrac{1}{[(s+a)^2+b^2]^n}$ | $\dfrac{-e^{-at}}{4^{n-1}b^{2n}}\sum_{r=1}^{n}\binom{2n-r-1}{n-1}(-2t)^{r-1}\dfrac{d^r}{dt^r}[\cos(bt)]$ |
| 27.2 | $\dfrac{s}{[(s+a)^2+b^2]^n}$ | $\dfrac{e^{-at}}{4^{n-1}b^{2n}}\left\{\sum_{r=1}^{n}\binom{2n-r-1}{n-1}(-2t)^{r-1}\dfrac{d^r}{dt^r}[a\cos(bt)+b\sin(bt)]-2b\sum_{r=1}^{n-1}r\binom{2n-r-2}{n-1}(-2t)^{r-1}\dfrac{d^r}{dt^r}[\sin bt]\right\}$ |
| 28 | $\dfrac{3a^2}{s^3+a^3}$ | $e^{-at}-e^{(at)/2}\left(\cos\dfrac{at\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\sin\dfrac{at\sqrt{3}}{2}\right)$ |
| 29 | $\dfrac{4a^3}{s^4+4a^4}$ | $\sin at\cosh at-\cos at\sinh at$ |
| 30 | $\dfrac{s}{s^4+4a^4}$ | $\dfrac{1}{2a^2}\sin at\sinh at$ |



## LAPLACE TRANSFORMS (Continued)

| | $f(s)$ | $F(t)$ |
|---|---|---|
| 31 | $\dfrac{1}{s^4-a^4}$ | $\dfrac{1}{2a^3}(\sinh at-\sin at)$ |
| 32 | $\dfrac{s}{s^4-a^4}$ | $\dfrac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$ |
| 33 | $\dfrac{8a^3s^2}{(s^2+a^2)^3}$ | $(1+a^2t^2)\sin at-\cos at$ |
| 34* | $\dfrac{1}{s}\left(\dfrac{s-1}{s}\right)^n$ | $L_n(t)=\dfrac{e^t}{n!}\dfrac{d^n}{dt^n}(t^ne^{-t})$ |
| 35 | $\dfrac{s}{(s-a)^{3/2}}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{at}(1+2at)$ |
| 36 | $\sqrt{s-a}-\sqrt{s-b}$ | $\dfrac{1}{2\sqrt{\pi t^3}}(e^{bt}-e^{at})$ |
| 37 | $\dfrac{1}{\sqrt{s}+a}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-ae^{a^2t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$ |
| 38 | $\dfrac{\sqrt{s}}{s-a^2}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}+ae^{a^2t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$ |
| 39 | $\dfrac{\sqrt{s}}{s+a^2}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}-\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int_0^{a\sqrt{t}}e^{\lambda^2}d\lambda$ |
| 40 | $\dfrac{1}{\sqrt{s}(s-a^2)}$ | $\dfrac{1}{a}e^{a^2t}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})$ |
| 41 | $\dfrac{1}{\sqrt{s}(s+a^2)}$ | $\dfrac{2}{a\sqrt{\pi}}e^{-a^2t}\int_0^{a\sqrt{t}}e^{\lambda^2}d\lambda$ |
| 42 | $\dfrac{b^2-a^2}{(s-a^2)(b+\sqrt{s})}$ | $e^{a^2t}[b-a\operatorname{erf}(a\sqrt{t})]-be^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$ |
| 43 | $\dfrac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+a)}$ | $e^{a^2t}\operatorname{erfc}(a\sqrt{t})$ |
| 44 | $\dfrac{1}{(s+a)\sqrt{s+b}}$ | $\dfrac{1}{\sqrt{b-a}}e^{-at}\operatorname{erf}(\sqrt{b-a}\sqrt{t})$ |
| 45 | $\dfrac{b^2-a^2}{\sqrt{s}(s-a^2)(\sqrt{s}+b)}$ | $e^{a^2t}\left[\dfrac{b}{a}\operatorname{erf}(a\sqrt{t})-1\right]+e^{b^2t}\operatorname{erfc}(b\sqrt{t})$ |
| 46† | $\dfrac{(1-s)^n}{s^{n+(1/2)}}$ | $\dfrac{n!}{(2n)!\sqrt{\pi t}}H_{2n}(\sqrt{t})$ |
| 47 | $\dfrac{(1-s)^n}{s^{n+(3/2)}}$ | $-\dfrac{n!}{\sqrt{\pi}(2n+1)!}H_{2n+1}(\sqrt{t})$ |

*$L_n(t)$ is the Laguerre polynomial of degree $n$.

†$H_n(x)$ is the Hermite polynomial. $H_n(x)=e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$.

(5)

## ROUTH CRITERION

Assume $B(s)$ to be an $n$th-order polynomial of the form

$$B(s) = b_n s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \qquad \text{(B-28)}$$

It is assumed that all $n$ $b$ coefficients are real, positive, and nonzero. (If any coefficient is zero or negative, there are either unstable or purely imaginary roots present and the Routh test is unnecessary.)

Construct now the array

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $s^n$ | $b_n$ | $b_{n-2}$ | $b_{n-4}$ | $\cdots$ |
| $s^{n-1}$ | $b_{n-1}$ | $b_{n-3}$ | $b_{n-5}$ | $\cdots$ |
| $s^{n-2}$ | $c_1$ | $c_2$ | $c_3$ | $\cdots$ |
| $s^{n-3}$ | $d_1$ | $d_2$ | $\cdots$ | |
| $\cdots$ | $\cdots$ | | | |
| $s^1$ | $f_1$ | | | |
| $s^0$ | $g_1$ | | | |

The entries in the first two rows are obtained directly from (B-28). The entries in the third row are computed from the entries in the two previous ones, as follows:

$$c_1 = \frac{b_{n-1}b_{n-2} - b_n b_{n-3}}{b_{n-1}}$$

$$c_2 = \frac{b_{n-1}b_{n-4} - b_n b_{n-5}}{b_{n-1}} \qquad \text{(B-29)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

The entries in the fourth row are computed similarly from the entries in the second and third rows, as follows:

$$d_1 = \frac{c_1 b_{n-3} - b_{n-1}c_2}{c_1}$$

$$d_2 = \frac{c_1 b_{n-5} - b_{n-1}c_3}{c_1} \qquad \text{(B-30)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

The pattern is now set, and after computing all the $n + 1$ rows, we end up with a triangular array.