Antydet løsninger for

Eksamen i F251 (MNFFY-350) Astrofysikk I (stjernefysikk)

Torsdag 15. mai 1997

Oppgave 1

a) Luminositeten for massive stjerner er gitt ved

$$L \sim M^{\alpha},$$

der

$$\alpha \approx 3.$$

Hvis stjerner med masse lik $1 M_\odot$ har en levetid

$$t_\odot \approx 10^{10} \text{ år},$$

som for sola (på hovedserien), vil tilsvarende grenseverdi for Pleiadene være gitt ved

$$L_p/L_\odot = M_p^3/M_\odot^3 = (6M_\odot)^3/M_\odot^3,$$

og siden mengden av fusjons-"brennstoff" er proporsjonalt med massen, og levetiden er omvendt proporsjonal med luminositeten, får vi

$$t_p/t_\odot = (M_p/M_\odot)/(L_p/L_\odot) = M_p^{-2}/M_\odot^{-2} = M_\odot^2/(6M_\odot)^2 = 1/36,$$

dvs. $t_p = 10^{10}/36$ år $\approx$ $\underline{\underline{3 \cdot 10^8 \text{ år}}}$

b) Solas absolutte (bolometriske) størrelsesklasse er lik

$$M_{BOL} = 4.72,$$

tilsvarende en avstand lik 10pc, dvs. vi får fra

$$m_1 - m_2 = -2.5 \lg(\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2),$$

der $\mathcal{F}_1/\mathcal{F}_2 = d^2(pc)/10^2,$

at størrelsesklasse 6 tilsvarer en avstand d gitt ved

$$4.72 - 6 = -2.5 \cdot \lg(d^2/10^2) = -5\lg(d/10) = 5 - 5\lg(d),$$

dvs. $\lg(d) = (-4.72 + 5 + 6)/5 = 6.28/5 = 1.256$

dvs. $\underline{\underline{d = 18\text{ pc}}} = \underline{\underline{58.7\text{ lysår}}} = \underline{\underline{3.7 \cdot 10^6\text{ AU}}} = \underline{\underline{5.6 \cdot 10^{14}\text{ km}}}$

c) Forskjellen i størrelsesklasse mellom de to stjernene tilsvarer et forhold i lysintensitet lik

$$\lg(I_2/I_1) = (2.85 - 1.99)/2.5 = 0.344,$$

$$I_2/I_1 = 2.21,$$

siden

$$m_1 - m_2 = +2.5\lg(I_2/I_1),$$

dvs. samlet størrelsesklasse er gitt ved

$$I_c/I_1 = (I_1 + I_2)/I_1 = 3.21,$$

$$\lg(I_c/I_1) = 0.507 = (m_1 - m_c)/2.5,$$

$$m_1 - m_c = 2.5 \cdot 0.507 = 1.27,$$

$$m_c = m_1 - 1.27 = 2.85 - 1.27 = \underline{\underline{1.58}}$$

Oppgave 2

a] Fermi-energien til en ikke-relativistisk ideell elektron-gass er

$$\varepsilon_F = p_F^2/2m_e,$$

der partikkel-tettheten n er gitt ved

$$n = (2/h^3)\int_0^{p_F} 4\pi p^2\,dp = p_F^3/(3\pi^2\hbar^3) = (8\pi/3h^3)\,p_F^3,$$

dvs. $p_F = \sqrt{2m_e\varepsilon_F} = (3\pi^2 n)^{1/3}\hbar = (3n/8\pi)^{1/3}\cdot h,$

og $\varepsilon_F = (3n/8\pi)^2 \quad = \underline{\underline{(3n/8\pi)^{2/3}(h^2/2m_e)}}$

Den ikke-relativistiske "kvante-grensen" n_Q er gitt ved

$$n_Q = (2\pi m_e kT/h^2)^{3/2} = (2\pi m_e kT)^{3/2}/h^3,$$

og partikkel-tettheten n er da lik n_Q for

$$n = (2m_e\varepsilon_F)^{3/2}(8\pi/3h^3) = n_Q = (2\pi m_e kT)^{3/2}/h^3,$$

dvs. $(8\pi/3)\,\varepsilon_F^{3/2} = \pi^{3/2}(kT)^{3/2},$

$$(8\pi/3)^{2/3}\varepsilon_F = \pi kT,$$

dvs. $kT/\varepsilon_F = (8/3)^{2/3}\pi^{-1/3} = (64/9\pi)^{1/3} = 2.26^{1/3} = \underline{1.31}$

b] Med fullstendig ionisert materie kan vi sette antall hydrogen-kjerner (protoner) pr. volumenhet (dvs. partikkel-tettheten) lik $(\rho X_1/m_H)$, der ρ er total masse-tetthet, og m_H er massen til et hydrogen-atom (tilnærmet like proton-massen eller nøytron-massen). Vi får da like mange elektroner fra hydrogen-atomene. Antall helium-kjerner blir lik $\underline{(\rho X_4/4m_H)}$, og vi får $\underline{(\rho X_4/2m_H)}$

elektroner fra helium-atomene. Antall tyngre kjerner, dvs. $(\rho X_A / m_H \langle A \rangle)$, der $\langle A \rangle$ er en middelverdi for antall nukleoner i en kjerne, kan neglisjeres, og antall elektroner pr. atom kan settes tilnærmet lik $(\langle A \rangle / 2)$, dvs. vi får $(\rho X_A / 2m_H)$ elektroner fra de tyngre grunnstoffene. Totalt antall partikler, dvs. total partikkel-tetthet, blir da

$$n = (\rho / m_H)[2X_1 + (3/4)X_4 + (1/2)X_A],$$

og den midlere molekyl-vekt pr. partikkel blir

$$\underline{\underline{\mu = (\rho / n m_H) = 1 / [2X_1 + (3/4)X_4 + (1/2)X_A]}}$$

c) Reaksjonsligningen er

$$\gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^-,$$

der $\mu(e^-) + \mu(e^+) = 2\mu(\gamma) = 0,$

og $\mu(e^+) - m_e c^2 = -kT \ln[g_s n_Q / n(e^+)],$

$$\mu(e^-) = \varepsilon_F.$$

Det gir da

$$\mu(e^-) = \varepsilon_F = -\mu(e^+) = -kT \cdot \ln[g_s n_Q / n(e^+)] - m_e c^2;$$

dvs. $\ln[g_s n_Q / n(e^+)] = (\varepsilon_F + m_e c^2)/kT,$

$$g_s n_Q / n(e^+) = \exp[(\varepsilon_F + m_e c^2)/kT],$$

$$n(e^+) = g_s n_Q \exp[-(\varepsilon_F + m_e c^2)/kT]$$

$$\underline{= 2(2\pi m_e kT / h^2)^{3/2} \exp[-(\varepsilon_F + m_e c^2)/kT]},$$

der $\varepsilon_F = (3n / 8\pi)^{2/3}(h^2/2m_e) = (3\rho / 8\pi m_H)^{2/3}(h^2/2m_e),$

og $g_s = 2,$

$$n(e^-) \approx n(p) \approx \rho / m_H,$$

for hydrogen, dvs. med innsatte tallverdier;

$$n(e^-) = \rho/m_H = 10^{10}/1.67\cdot 10^{-27} = \underline{6\cdot 10^{36}\,m^{-3}},$$

$$n(e^+) = 2\left[(2\pi\cdot 0.911\cdot 10^{-30}\cdot 1.38\cdot 10^{-23}\cdot 10^9)^{3/2}/(6.626\cdot 10^{-34})^3\right]$$
$$\times\exp\left[-\{(3\cdot 10^{10}/(8\pi\cdot 0.167\cdot 10^{-26})^{2/3}[(6.626\cdot 10^{-34})^2/2\cdot 9.11\cdot 10^{-31}] + 9.11\cdot 10^{-31}(3\cdot 10^8)^2\}/1.38\cdot 10^{-23}\cdot 10^9\right]$$
$$= 2(22.2\cdot 10^{-66}/290.9\cdot 10^{-102})\exp[-(6.8\cdot 10^{24}\cdot 2.41\cdot 10^{-37} + 8.2\cdot 10^{-15})/1.38\cdot 10^{-14}]$$
$$= 0.152\cdot 10^{36}\cdot\exp[-(1.93\cdot 10^{-13} + 0.82\cdot 10^{-13})/1.38\cdot 10^{-14}]$$
$$= 1.52\cdot 10^{35}\exp(-19.93) = 1.52\cdot 10^{35}\cdot 2.21\cdot 10^{-9} = \underline{3.4\cdot 10^{26}\,m^{-3}},$$

dvs. $n(e^+)/n(e^-) = 3.4\cdot 10^{26}/6\cdot 10^{36} = \underline{5.7\cdot 10^{-11}}$

$$\left(\begin{aligned} n_Q &= (2\pi\cdot 0.911\cdot 10^{-30}\cdot 1.38\cdot 10^{-23}\cdot 10^9)^{3/2}/(6.626\cdot 10^{-34})^3 \\ &= [(2\pi\cdot 0.911\cdot 1.38)^{3/2}/6.626^3][(10^{-44})^{3/2}/(10^{-34})^3] \\ &= (22.2/290.9)(10^{-66}/10^{-102}) = 7.63\cdot 10^{34} \end{aligned}\right)$$

$$\left(\begin{aligned} \varepsilon_F &= (3\cdot 10^{10}/8\pi\cdot 0.167\cdot 10^{-26})^{2/3}(6.626\cdot 10^{-34})^2/(2\cdot 9.11\cdot 10^{-31}) \\ &= (0.7148\cdot 10^{36})^{2/3}\,6.626^2\cdot 10^{-68}/(18.22\cdot 10^{-31}) \\ &= 1.926\cdot 10^{24}\cdot 10^{-68}\cdot 10^{31} = 1.93\cdot 10^{-13} \end{aligned}\right)$$

Oppgave 3

a) "Klassisk", skulle ^4He-kjernene stoppe når den kinetiske energien er omformet til potensiell Coulomb-energi, dvs.

$$E = Z_A Z_B e^2/4\pi\varepsilon_0 r_c,$$

som gir en minste relativ-avstand

$$r_c = Z_A Z_B e^2/4\pi\varepsilon_0 E$$

$$= 4(1{,}6\cdot 10^{-19})^2/(4\pi\cdot 8{,}854\cdot 10^{-12}\cdot 1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 2\cdot 10^3)\ m$$

$$= \underline{\underline{3\cdot 10^{-12}\,m}} = \underline{\underline{3000\ fm}},$$

siden $Z_A = Z_B = 2$

for ^4He. Sannsynligheten for gjennomtrengning av den potensielle Coulomb-barrieren er gitt ved

$$P_p \approx \exp[-(E_G/E)^{1/2}],$$

der Gamow-energien E_G er

$$E_G = (\pi\alpha Z_A Z_B)^2\cdot 2m_r c^2 = (4\pi\alpha)^2 4 m_p c^2$$

$$= 64(\pi/137)^2\cdot 1{,}67\cdot 10^{-27}\cdot(3\cdot 10^8)^2\ J$$

$$= \underline{5{,}06\cdot 10^{-12}\,J} = 31600\ keV = \underline{31{,}6\ MeV},$$

siden redusert masse blir lik

$$m_r = m_4 m_4/(m_4 + m_4) \approx (4\cdot 4/8)\,m_p = 2m_p.$$

Tilsvarende sannsynlighet blir da

$$P_p = \exp[-(31600/2)^{1/2}] = \underline{\exp(-125{,}7)}$$

$$= \underline{\underline{2{,}67\cdot 10^{-55}}}$$

b) Reaksjonshastigheten ("raten") kan approksimeres med de dominerende faktorene

$$R_{AB} \propto n_A n_B \cdot S(E_0) \exp[-3(E_G/4kT)^{1/3}],$$

dvs. temperaturavhengigheten

$$R_{AB}(T) \propto \exp[-3(E_G/4kT)^{1/3}]$$

gir oss, ved derivasjon,

$$dR_{AB}/dT \sim -3(E_G/4k)^{1/3}(-T^{-4/3}/3)\exp[-3(E_G/4kT)^{1/3}]$$
$$= (E_G/4kT)^{1/3}(R_{AB}/T)$$

For prosessen

$$p + {}^7Be \rightarrow {}^8B + \gamma$$

er redusert masse lik

$$m_r = m_A m_B/(m_A + m_B) = 1 \cdot 7/(1+7)\, m_p = (7/8)\, m_p,$$

og Gamow-energien er gitt ved

$$E_G = (\pi\alpha Z_A Z_B)^2\, 2 m_r c^2$$
$$= (\pi \cdot 4/137)^2 \cdot 2 \cdot (7/8) \cdot 1{,}67 \cdot 10^{-27}(3 \cdot 10^8)^2\ J$$
$$= 2{,}21 \cdot 10^{-12}\ J = 2{,}21 \cdot 10^{-12}/1{,}6 \cdot 10^{-19}\ eV = 1{,}38 \cdot 10^7\ eV$$
$$= 13800\ keV = 13{,}8\ MeV$$

For $T = 1{,}5 \cdot 10^7\ K$

får vi da temperaturavhengigheten

$$kT = 8{,}62 \cdot 10^{-5} \cdot 1{,}5 \cdot 10^7\ eV = 1{,}29 \cdot 10^3\ eV = 1{,}3\ keV,$$
$$dR_{AB}/dT \sim (E_G/4kT)^{1/3} \cdot (R_{AB}/T) = (13800/4 \cdot 1{,}3)^{1/3}(R_{AB}/T)$$
$$= 2652^{1/3}(R_{AB}/T) = 13{,}85\,(R_{AB}/T) \simeq 14\,(R_{AB}/T)$$

dvs. $dR_{AB}/R_{AB} \simeq 14\, dT/T$

$\ln(R_{AB}) \simeq 14 \cdot \ln(T)$, $\quad \underline{R_{AB} = R_{pBe} \sim T^{14}}$

c) Med de gitte tallverdiene vil mulig energiproduksjon ved de to syklusene være

$$\varepsilon_{pp} = 2.5\cdot 10^6 \cdot 10^4 (10^6/2.7\cdot 10^7)^{2/3} \exp[-33.8(10^6/2.7\cdot 10^7)^{1/3}] \cdot 10^{-7} \text{ J kg}^{-1}\text{s}^{-1}$$

$$= 2.5\cdot 10^3 \cdot 0.111 \cdot \exp(-33.8\cdot 0.333) \text{ J kg}^{-1}\text{s}^{-1}$$

$$= 2.775\cdot 10^2 \exp(-11.256) \text{ J kg}^{-1}\text{s}^{-1} = \underline{3.59\cdot 10^{-3} \text{ J kg}^{-1}\text{s}^{-1}},$$

$$\varepsilon_{CNO} = 8\cdot 10^{27} \cdot 10^4 \, 0.005 (10^6/2.7\cdot 10^7)^{2/3} \exp[-152.8(10^6/2.7\cdot 10^7)^{1/3}] 10^{-7}$$

$$= 4\cdot 10^{22} \, 0.111 \cdot \exp(-152.8\cdot 0.333)$$

$$= 4.44\cdot 10^{21} \exp(-50.933) \text{ J kg}^{-1}\text{s}^{-1} = \underline{0.34 \text{ J kg}^{-1}\text{s}^{-1}},$$

og vi ser at <u>CNO-syklusen dominerer totalt over proton-proton-syklusen</u>. Total energi produsert (og utstrålt) blir da

$$E = \rho(4\pi r^3/3)\varepsilon_{CNO} = 10^4(4\pi/3)(0.15\cdot 3.6\cdot 7\cdot 10^8)^3 \, 0.34 \text{ J/s}$$

$$(= \underline{7.7\cdot 10^{36} \text{ erg/sek.}}) = \underline{7.7\cdot 10^{29} \text{ J/sek.}}$$

Siden stjernens overflate er

$$4\pi R^2 = 4\pi(3.6\cdot 7\cdot 10^8)^2 \text{ m}^2 = 7.98\cdot 10^{19} \text{ m}^2,$$

vil utstråling pr. overflateenhet bli

$$U = 7.7\cdot 10^{29}/7.98\cdot 10^{19} \text{ J m}^{-2}\text{sek}^{-1} = 0.96\cdot 10^{10} \text{ W},$$

og Stefan-Boltzmanns lov gir oss da

$$T = \sqrt[4]{U/\sigma} = \sqrt[4]{0.96\cdot 10^{10}/5.67\cdot 10^{-8}} \text{ K} = \underline{20300 \text{ K}},$$

siden $U = \sigma T^4$.

(Vi ser at energiproduksjonen ved <u>proton-proton-syklusen</u> utgjør <u>ca. 1%</u> av energiproduksjonen ved <u>CNO-syklusen</u>.)