



(MNFFY350)
EKSAMEN I: MNFFY352 - ASTROFYSIKK II (STJERNEFYSIKK)

DATO: ONSDAG 9. DESEMBER 1998

TID: 09.00 - 15.00

Antall vekttall: 3

Tillatte hjelpemidler:

Antall sider: 4

Matematiske tabeller,
kalkulator

Sensurdato: 6. Januar 1998

Oppgave 1

- a) Strømmen eller flukstettheten for varmeledning ved kulesymmetrisk strålingsdiffusjon, er gitt ved

$$j(r) = -(4ac/3)[T^3(r)/\rho(r)\kappa(r)](dT/dr),$$

der a er konstanten i Stefan-Boltzmanns lov, c er lyshastigheten, T er temperaturen, ρ er tettheten, og κ er opasiteten. Finn temperatur-gradienten uttrykt ved varme (strålings)-fluksen eller luminositeten. Vis at dette tilsvarer en gradient dP/dr for strålingstrykket, som er proporsjonal med varme(strålings)-strømmen eller flukstettheten.

- b) Finn flukstettheten som kan opprettholde en "atmosfære" rundt en stjerne med en overflate-gravitasjon gitt ved tilsvarende tyngdeakselerasjon g . Vis at en stjerne med masse M da har en maksimal luminositet (Eddington-grensen) gitt ved

$$L_{max} = L_{Edd} = 4\pi cGM / \kappa,$$

der G er gravitasjonskonstanten, og κ er opasiteten ved overflaten.

- c) Vis at den kritiske grensen for konveksjon i stjerner, gitt ved

$$[dT/dr]_{konv.} < [(\gamma - 1)/\gamma](T/P)(dP/dr),$$

for ideell gass, kan skrives

$$|dT/dr|_{konv.} > g/C_p,$$

der T er temperaturen, C_p er varmekapasiteten (pr. masse-enhet) ved konstant trykk, og g er tyngdeakselerasjonen (tilsvarende den lokale gravitasjonskraften). γ er her den adiabatiske indeksen definert ved tilstandslikningen

$$P = \text{Konstant} \cdot \rho^\gamma.$$

Hvorfor er den nødvendige temperatur-gradienten for konveksjon mindre (i tallverdi) for større C_p ?

Oppgitt:

$$\text{Stefan-Boltzmanns lov: } u = aT^4,$$

$$\text{Kramers lov: } \kappa = \kappa_0 \rho T^{-3.5}.$$

Oppgave 2

- a) Vis at for en ideell Maxwell-Boltzmann-gass, med en polytrop (adiabatisk) tilstandsligning

$$P = K \cdot \rho^\gamma,$$

der P er trykket, ρ er tettheten, og K og γ er konstanter, kan den kinetiske energi skrives

$$E_k = (3/2)(\gamma - 1)U,$$

der U er gassens (stjernas) indre energi.

- b) Vis at virial-teoremet er oppfylt under a), dvs.

$$E_k = -W/2,$$

der W er stjernas potensielle gravitasjonsenergi.

- c) En stjerne med masse M og radius R betraktes som en gass med tetthet $\rho(r)$ som holdes sammen i hydrostatisk likevekt av gravitasjonskrefter. Bruk relasjonen

$$d(P/\rho) = [(\gamma - 1)\gamma]Gm(r)d(1/r),$$

til å vise at den potensielle gravitasjonsenergien er gitt ved

$$W = -3[(\gamma - 1)/(5\gamma - 6)](GM^2/R),$$

når vi antar tilstandslikningen under a) for gassen.

Oppgitt:

$$\text{Termodyn. første lov: } Q = U + PV.$$

Oppgave 3

- a) Et foton kan ionisere et hydrogen-atom ved prosessen

$$\gamma + H_n \rightarrow e^- + p.$$

Hva er betingelsen for termodynamisk likevekt for denne prosessen? For en "klassisk" gass av ikke-relativistiske partikler (fermioner) kan vi anta at totalt antall partikler (tilstander) er gitt ved

$$N = \exp(\mu/kT) \int_0^{\infty} \exp(-\varepsilon_p/kT) g_s (V/h^3) 4\pi p^2 dp,$$

der μ er kjemisk potensial, k er Boltzmanns konstant, T er temperatur, V er volum, h er Plancks konstant, p er impuls, g_s er antall tilstander pr. impuls-tilstand, og ε_p er en-partikkel-energien gitt ved

$$\varepsilon_p = mc^2 + p^2/2m.$$

Vis at Saha-ligningen for den gitte prosessen da kan skrives

$$n(H_n)/n_e n_p = (g_n/n_{Qe}) \exp(-Q/kT),$$

der g_n angir degenerasjonsgrad eller antall tilstander pr. impulstilstand, n_i angir partikkel-tettheten for partikkel-type i , n_{Qe} angir en "kvante-grense" for elektron-partikkel-tettheten, og Q er bindingsenergien eller differansen i hvilemasse-energi, gitt ved

$$g_n = g(H_n)/g_e g_p,$$

$$n_{Qe} = (2\pi m_e kT/h^2)^{3/2},$$

$$Q = m(H_n)c^2 - m_e c^2 - m_p c^2,$$

der m_i er partikkel-massen for partikkel-type i .

- b) Anta at vi i forbindelse med en supernova og tilsvarende gravitasjonskollaps får (delvis) foto-dissosiasjon av jern (Fe) ved prosessen

$$\gamma + {}^{56}_{26}\text{Fe} \rightarrow 13\alpha + 4n,$$

der γ er et foton og n er et nøytron. Vis at materie som består av bare ${}^{56}\text{Fe}$, α -partikler (helium-kjerner) og nøytroner, vil bestå av halvparten ${}^{56}\text{Fe}$ (i masse) og halvparten α -partikler og nøytroner, når vi har oppfylt

$$l_{\text{QD}} = 11.62 + 1.5 l_{\text{g}} T_0 - 39.13/T_0,$$

der ρ er tettheten gitt i $[\text{g}/\text{cm}^3]$, og T_9 er temperaturen definert ved

$$T_9 = T[\text{K}] / 10^9 \text{ K}.$$

- c) Finn temperaturen T for 50% spalting av ^{56}Fe til ^4He og nøytroner som angitt under b), når tettheten ρ er lik

$$\rho = 10^9 \text{ g}/\text{cm}^3.$$

Opgitt:

$$\int_0^{\infty} \exp(-ax^2) dx = (\pi/a)^{1/2} / 2,$$

$$g_{\alpha} = 1,$$

$$g_{\text{Fe}} = 1.4,$$

$$(13m_{\alpha} + 4m_n - m_{\text{Fe}})c^2 = 124.4 \text{ MeV} = 1.99 \cdot 10^{-4} \text{ erg},$$

$$\text{Plancks konstant: } \hbar = h/2\pi = 1.054 \cdot 10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{sek},$$

$$\text{Boltzmanns konstant: } k = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg}/\text{K},$$

$$\text{Atomisk masse-enhet: } m_u = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}.$$

MERK:

Studentene må primært gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene. Evt. telefonhenvendelser om sensur må rettes til instituttet eller sensurtelefon: 815 48014. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike henvendelser.