(MNFFY-350) (1)

Eksamen ~~FY352~~ Astrofysikk II (Stjernefysikk)

9/12. 1998. Antydet løsning

Oppgave 1

a) Flukstettheten er gitt ved

$$j(r) = L(r)/4\pi r^2 = -(4ac/3)[T^3(r)/\rho(r)\kappa(r)](dT/dr),$$

dvs.

$$dT/dr = -[3\rho(r)\kappa(r)/4acT^3(r)][L(r)/4\pi r^2]$$
$$= \underline{-3\rho(r)\kappa(r)L(r)/16\pi ac[T(r)]^3 r^2}.$$

Strålingstrykket er gitt ved

$$P = \tfrac{1}{3}(U/V) = \tfrac{1}{3}n\langle\varepsilon_p\rangle = \tfrac{1}{3}(N/V)\langle pc\rangle = \tfrac{1}{3}u = \underline{\tfrac{1}{3}aT^4},$$

dvs.

$$dP/dr = (4aT^3/3)(dT/dr) \qquad (= \rho(r)\kappa(r)j(r)/c)$$
$$= (4aT^3/3)[-3\rho\kappa L/(16\pi acr^2T^3)] = \underline{-\rho(r)\kappa(r)L(r)/4\pi cr^2}$$

b) For opprettholdelse av atmosfæren er strålingstrykket lik gravitasjonskraften (trykket) for hydrostatisk likevekt, dvs.

$$dP/dr = -\rho\kappa L/4\pi cr^2 = -\rho(r)g(r) = -GM\rho(r)/r^2,$$

dvs. fluksen L er da

$$L = 4\pi cGM/\kappa(r),$$

og flukstettheten blir

$$j(r) = L/4\pi r^2 = \underline{c(GM/r^2)/\kappa(r)}.$$

Ved overflaten får vi da

$$r = R,$$
$$GM/R^2 = g,$$
$$L/4\pi R^2 = \underline{cg/\kappa(R)}, \qquad \text{(fluks-tettheten)}$$
$$L = L_{max} = L_{Edd} = \underline{\underline{4\pi c GM/\kappa(R).}} \qquad \text{(fluksen)}$$

b] Betingelsen for konveksjon er gitt ved

$$dT/dr < [(\gamma-1)/\gamma](T/P)(dP/dr),$$

der

$$dP/dr = -\rho g.$$

Dessuten er

$$\gamma = C_p/C_v,$$
$$(\gamma-1)/\gamma = (C_p - C_v)/C_p,$$
$$dT/dr < [(\gamma-1)/\gamma](T/P)(dP/dr) = -(C_p - C_v)(T\rho g/C_p P)$$
$$= -(g/C_p)[(C_p - C_v)\rho T/P] = -(g/C_p)(RN\bar{m}T/PV$$
$$= -(g/C_p)(NkT/PV) = \underline{-g/C_p},$$

dvs.

$$\underline{\underline{|dT/dr| > g/C_p}}$$

En større C_p betyr at varmekapasiteten er høy på grunn av absorpsjon av varme ved eksitasjon eller dissosiasjon av eksisterende partikler (atomer eller molekyler). Temperatur-gradienten som er nødvendig for konveksjon blir da mindre (i tallverdi)
Eller: Flere frihetsgrader gir mindre γ, som gir mindre temperatur-gradient-grense (i tallverdi siden $\gamma = C_p/C_v = (1+s/2)/(s/2)$, der s = antall frih.gr.

Oppgave 2

a) For en gass med adiabatisk tilstandslikning

$$P = K\rho^{\gamma},$$

gir termodynamikkens første lov

$$Q = U + PV,$$
$$dU = -PdV \ (+TdS),$$
$$d(\varepsilon/\rho) = -Pd(1/\rho) = -K\rho^{\gamma-2}d\rho,$$
$$\varepsilon/\rho = [K/(\gamma-1)]\rho^{\gamma-1} + \text{konstant} = P/\rho(\gamma-1) + c^2,$$
$$\varepsilon = P/(\gamma-1) + \rho c^2 = \varepsilon_k + \rho c^2,$$

der gassens energi-tetthet (uten hvilemasse-ledd) er

$$\varepsilon_k = P/(\gamma-1).$$

For en ikke-relativistisk ideell gass med isotrop impuls-fordeling gjelder videre

$$PV = NkT = N\langle mv^2/3\rangle = (2/3)N\langle mv^2/2\rangle$$
$$PdV = (2/3)\,dE_k,$$

dvs. den kinetiske energi blir

$$E_k = (3/2)\int PdV = (3/2)\int_0^R P\cdot 4\pi r^2 dr$$
$$= (3/2)\int_0^R (\gamma-1)\varepsilon_k \cdot 4\pi r^2 dr = \underline{\underline{(3/2)(\gamma-1)U}},$$

der

$$U = \int_0^R \varepsilon_k \cdot 4\pi r^2 dr.$$

b) Den potensielle gravitasjonsenergien i stjerna blir

$$W = -\int [Gm(r)/r]\,dm = -\int Gm(r)\rho r^2 dr\, d\Omega/r$$
$$= -\int_0^R 4\pi\rho G m(r) r\, dr = -\int_0^R [\rho G m(r) r^2]\, 4\pi r^3 dr$$
$$= \int_0^R (dP/dr)\, 4\pi r^3 dr,$$

når vi bruker den ikke-relativistiske ligningen for hydrostatisk likevekt, dvs.

$$dP/dr = -\rho G m(r) r^2.$$

Delvis integrasjon gir da

$$W = \Big|_0^R P\cdot 4\pi r^3 - \int_0^R P\cdot 12\pi r^2 dr = -3\int_0^R P\cdot 4\pi r^2 dr$$
$$= -3\int_0^R (\gamma-1)\varepsilon_k \cdot 4\pi r^2 dr = -3(\gamma-1)U,$$

dvs. $\underline{\underline{W = -2E_k}}$

c) Ved hydrostatisk likevekt gjelder

$$dm/dr = 4\pi r^2\rho;$$
$$dP/dr = -Gm\rho/r^2;$$
$$P = K\rho^\gamma,$$

dvs.

$$4\pi r^2 dr = dm/\rho$$
$$P/\rho = K\rho^{\gamma-1},$$

og den potensielle gravitasjonsenergien blir

$$W = -\int_0^R (Gm/r)\, 4\pi r^2\rho\, dr = \int_0^R (dP/dr)\, 4\pi r^3 dr$$
$$= \Big|_0^R 4\pi P r^3 - 3\int_0^R 4\pi P r^2 dr = -3\int_0^M (P/\rho)\, dm.$$

Delvis integrasjon gir videre

$$W = -3\Big[(P/\rho)m\Big]_0^R + 3\int m\, d(P/\rho)$$
$$= 3[(\gamma-1)/\gamma]G\int m^2 d(1/r) = -3[(\gamma-1)/\gamma]G\int_0^R (m^2/r^2)\,dr$$
$$= 3[(\gamma-1)/\gamma]G\Big[m^2/r\Big]_0^R - 3[(\gamma-1)/\gamma]G\int_0^M 2(m/r)\,dm$$
$$= 3[(\gamma-1)/\gamma](M^2G/R) - 6[(\gamma-1)/\gamma]G\int_0^R (m/r)\,4\pi\rho r^2\,dr$$
$$= 3[(\gamma-1)/\gamma](M^2G/R) + 6[(\gamma-1)/\gamma]\int_0^R 4\pi r^3 (dP/dr)\,dr$$
$$= 3[(\gamma-1)/\gamma](M^2G/R) - 6[(\gamma-1)/\gamma]\,3\int_0^R 4\pi P r^2\,dr$$
$$= 3[(\gamma-1)/\gamma](M^2G/R) + 6[(\gamma-1)/\gamma]W,$$

dvs.

$$\underline{\underline{W = -3[(\gamma-1)/(5\gamma-6)](GM^2/R)}}$$

Oppgave 3

a) Betingelsen for termodynamisk likevekt er her

$$\underline{\underline{\mu(H_n) = \mu(e) + \mu(p)}},$$

siden

$$\mu(\gamma) = 0.$$

Antall partikler (tilstander) for en partikkel-type blir

$$N = \exp(\mu/kT)\int_0^\infty \exp[-(mc^2 + p^2/2m)/kT]\,g_s(V/h^3)4\pi p^2\,dp.$$

Her er

$$4\pi\int_0^\infty \exp(-p^2/2mkT)p^2\,dp = (2\pi mkT)^{3/2},$$

siden

$$\int_0^\infty \exp(-ax^2)\,dx = (\pi/a^3)^{1/2}/4,$$

dvs.

$$n = N/V = (g_s/h^3)(2\pi mkT)^{3/2}\exp[(\mu - mc^2)/kT]$$
$$= g_s n_Q \exp[(\mu - mc^2)/kT],$$

dvs.

$$\mu - mc^2 = kT\ln[(n/g_s)(h^2/2\pi mkT)^{3/2}] = \div kT\ln(g_s n_Q/n)$$

dvs.

$$\mu(e) = m_e c^2 - kT\ln(g_e n_{Qe}/n_e),$$
$$\mu(p) = m_p c^2 - kT\ln(g_p n_{Qp}/n_p),$$
$$\mu(H_n) = m(H_n)c^2 - kT\ln[g(H_n)n_{Qp}/n(H_n)].$$

Betingelsen for termodynamisk likevekt gir da

$$\mu(H_n) = \mu(e) + \mu(p),$$
$$\exp(Q/kT) = g(H_n)n_{Qp}n_e n_p/n(H_n)g_e n_{Qe} g_p n_{Qp},$$
$$\underline{n(H_n)/n_e n_p = (g_n/n_{Qe})\exp(-Q/kT).}$$

b) For prosessen

$$\gamma + {}^{56}Fe \rightarrow 13\,{}^{4}He + 4n,$$

gir Saha-ligningen (analogt med a))

$$\div Q = m_{Fe}c^2 - 13m_\alpha c^2 - 4m_n c^2 = kT[\ln(g_{Fe}n_{QFe}/n_{Fe})$$
$$- 13\ln(g_\alpha n_{Q\alpha}/n_\alpha) - 4\ln(g_n n_{Qn}/n_n)]$$

dvs.

$$n_\alpha^{13} n_n^4/n_{Fe} = (g_\alpha^{13} g_n^4/g_{Fe})(2\pi kT/h^2)^{24}(m_\alpha^{13} m_n^4/m_{Fe})^{3/2} e^{-Q/kT}$$
$$= (2^{43}/56^{3/2} \cdot 1.4)(m_u kT/2\pi\hbar^2)^{24}\exp(-Q/kT),$$

der

$$Q = (13m_\alpha + 4m_n - m_{Fe})c^2,$$

når vi setter $g_n = 2$, $g_\alpha = 1$, $g_{Fe} = 1.4$,

$$(m_\alpha^{13} m_n^4 / m_{Fe}) \approx (4 m_u)^{13} m_u^4 / 56 m_u \approx 2^{26} m_u^{16} / 56.$$

Når halvparten av atomkjernene er spaltet, må antall partikler eller partikkel-tetthetene være

$$n_\alpha = 13 n_{Fe},$$
$$n_n = 4 n_{Fe},$$

og masse-tettheten ρ er

$$\rho = 2 \cdot m_{Fe} n_{Fe} = 2 \cdot 56 m_u \cdot n_{Fe}, \quad \text{dvs. } n_{Fe} = \rho / (2 \cdot 56 m_u)$$

Saha-ligningen gir da

$$(13 n_{Fe})^{13} (4 n_{Fe})^4 / n_{Fe} = (2^{43} / 56^{3/2} \cdot 1.4)(m_u kT / 2\pi\hbar^2)^{24} \cdot \exp(-Q/kT)$$

dvs.

$$13^{13} 4^4 n_{Fe}^{16} \cdot 56^{3/2} \cdot 1.4 \; 2^{24} \pi^{24} \hbar^{48} / (2^{43} m_u^{24} k^{24} T^{24}) = \exp(-Q/kT)$$
$$= 13^{13} 56^{3/2} \cdot 1.4 \; \pi^{24} \hbar^{48} \rho^{16} / (2^{11} 2^{16} 56^{16} m_u^{16} m_u^{24} k^{24} T^{24}) = \exp(-Q/kT)$$

dvs.

$$\exp(-Q/kT) = 13^{13} \cdot 1.4 \; \pi^{24} (1.054 \cdot 10^{-27})^{48} \rho^{16} / [2^{27} 56^{29/2} (1.66 \cdot 10^{-24})^{40} (1.38 \cdot 10^{-16})^{24} T^{24}]$$
$$= \exp(-1.99 \cdot 10^{-4} / 1.38 \cdot 10^{-16} T)$$

$$\text{dvs. } \ln(13^{13} \cdot 1.4 \cdot \pi^{24} \cdot 1.054^{48} \cdot \rho^{16} \cdot 10^{48} / 2^{27} \cdot 56^{29/2} \cdot 1.66^{40} \cdot 1.38^{24} T^{24}) = -1.442 \cdot 10^{12}/T$$
$$= 16 \ln(8.03 \cdot 1.02 \cdot 5.56 \cdot 1.17 \cdot 10^3 \rho / 3.22 \cdot 38.40 \cdot 3.56 \cdot 1.62 \, T^{3/2})$$
$$= 13 \ln 13 + \ln 1.4 + 24 \ln \pi + 48 \ln 10.54 + 16 \ln \rho - 27 \ln 2 - 14.5 \ln 56 - 40 \ln 1.66 - 24 \ln 1.38 - 24 \ln T$$
$$= 33.34 + 0.34 + 27.47 + 113.05 + 16 \ln \rho - 18.72 - 58.37 - 20.27 - 7.73 - 24 \ln T = 69.11 + 16 \ln \rho - 24 \ln T$$

$$\text{dvs. } \ln \rho + \ln 75.\ldots - 1.5 \ln T = -9.01 \cdot 10^{10} / T, \quad (\ln 75.1 = 4.32)$$
$$\lg \rho = 1.5 \lg (T/10^9) + 1.5 \lg 10^9 - \lg 75.1 - 90.1 \lg e / (T/10^9)$$
$$\underline{\underline{\lg \rho = 11.62 + 1.5 \lg T_9 - 39.13 / T_9}} \quad (\lg x = \ln x \cdot \lg e)$$

c] For spalting av ^{56}Fe får vi her

$$\lg \rho = 11.62 + 1.5 \lg T_9 - 39.13/T_9 = \lg 10^9 = 9,$$

dvs.

$$2.62 + 1.5 \lg T_9 = 39.13/T_9,$$

$$(1.5 \lg T_9 + 2.62)\, T_9 = 39.13.$$

Vi forsøker først approksimasjonen

$$\lg T_9 \approx 1,$$

som gir

$$T_9 \approx 39.13/4.12 = 9.5.$$

Mer nøyaktig tilpasning gir

$$T_9 = 9.6, \quad (\lg T_9 = 0.98)$$

dvs.

$$\underline{\underline{T = 9.6 \cdot 10^9\ K}}$$