



(MNFFY-350)  
EKSAMEN I: MNFFY352 - ASTROFYSIKK II (STJERNEFYSIKK)

DATO: TORSDAG 9. DESEMBER 1999

TID: 09.00 - 15.00

Antall vekttall: 3

Tillatte hjelpemidler:  
Matematiske tabeller,  
kalkulator

Antall sider: 4

Sensurdato: 6. Januar 2000

---

**Oppgave 1**

- a) En elektron-gass kan betraktes som en (kald) ideell Fermi gass uten indre vekselvirkninger. Trykket i en slik ideell gass er generelt gitt ved

$$P = (n/3) \langle pv \rangle,$$

der  $n$  er partikkel-tettheten, og sammenhengen mellom (relativistisk) hastighet  $v$  og impuls  $p$  er gitt ved

$$v = pc^2 / \varepsilon,$$

der  $\varepsilon$  er en-partikkel-energien. Vis at tilstandsligningen, dvs. trykket  $P$ , da er generelt gitt ved

$$P = K \cdot n^{4/3} \cdot I(x),$$

der

$$K = (hc/4)(3/8\pi)^{1/3},$$

$$I(x) = (3/2x^4) \left\{ x(1+x^2)^{1/2} \left[ (2x^2/3) - 1 \right] + \ln \left[ x + (1+x^2)^{1/2} \right] \right\},$$

$$x = p_F / mc,$$

og  $p_F$  er Fermi-impulsen,  $m$  er elektron-massen,  $c$  er lyshastigheten, og  $h$  er Plancks konstant. Vis at trykket da er gitt ved

$$P = (mc^2 / \lambda^3) \Phi(x),$$

$$\lambda = \hbar / mc,$$

der

$$\Phi(x) = (x^4 / 12\pi^2) I(x),$$

og  $\lambda$  er Compton-bølgelengden.

- b) Vis at for  $x \ll 1$ , dvs for ikke-relativistiske elektroner, får vi

$$\Phi(x) \rightarrow [x^5 - (5/14)x^7 + (5/24)x^9 \dots] / 15\pi^2,$$

og for  $x \gg 1$ , dvs, for relativistiske elektroner, får vi

$$\Phi(x) \rightarrow [x^4 - x^2 + (3/2)\ln(2x) \dots] / 12\pi^2.$$

- c) Hva blir tilstandsligningen for ikke-relativistiske elektroner, og hva blir tilstandsligningen for ultra-relativistiske elektroner? Hva er tilsvarende konstanter K i tilstandsligningene, dvs  $K_{NR}$  (ikke-relativistisk) og  $K_{UR}$  (ultra-relativistisk)?

Oppgitt

$$\int [x^4 / (1+x^2)^{1/2}] dx = (3/8) \left\{ \left[ (2x^2/3) - 1 \right] x (1+x^2)^{1/2} + \ln \left[ x + (1+x^2)^{1/2} \right] \right\},$$

$$: (1+x)^{1/2} = 1 + (x/2) - (x^2/8) + (x^3/16) \dots$$

$$\ln(1+x) = x - (x^2/2) + (x^3/3) - (x^4/4) \dots$$

## Oppgave 2

- a) Reaksjonshastigheten ("raten")  $R_{AB}$  for en fusjonsprosess er tilnærmet gitt ved

$$R_{AB} \sim S(E_0) \exp \left[ -3(E_G / 4kT)^{1/3} \right],$$

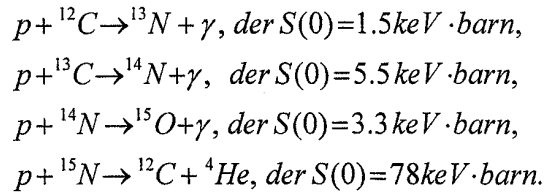
der  $S(E_0)$  er en kjernefysisk "fusjonsfaktor",  $E_G$  er Gamow-energien

$$E_G = (\pi\alpha Z_A Z_B)^2 \cdot 2m_r c^2,$$

$k$  er Boltzmanns konstant,  $T$  er temperatur,  $Z_A$  og  $Z_B$  er antall protoner i de to kjernene A og B,  $m_r$  er den reduserte massen for de to kjernene,  $c$  er lyshastigheten, og  $\alpha$  er finstruktur-konstanten

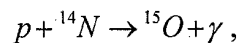
$$\alpha = e^2 / (4\pi\epsilon_0 \hbar c) = 1/137.$$

For CNO-syklusen kan vi betrakte reaksjonene



Hvilken reaksjon har den største Gamow-energien?

- b) Vis at den mest langsomme reaksjonen med minst  $R_{AB}$  i denne syklusen i sola er reaksjonen



når den indre temperaturen i sola settes lik

$$T \approx 1.5 \cdot 10^7 \text{ K}.$$

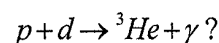
- c) Finn tilsvarende temperaturavhengighet for CNO-syklusen i sola, dvs.  $R_{AB}(T)$  på formen

$$R_{AB} \sim T^x,$$

når vi antar

$$R_{AB} \sim (E_G / 4kT)^{2/3} \exp[-3(E_G / 4kT)^{1/3}].$$

Hva er tilsvarende temperaturavhengighet for proton-proton-syklusen i sola, dvs. for reaksjonen



Opgitt:

$$\text{Pr oton - massen : } m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{Lyshastigheten : } c = 3 \cdot 10^8 \text{ m} \cdot \text{sek}^{-1},$$

$$\text{Boltzmanns konsant : } k = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV} \cdot \text{grad}(K)^{-1}.$$

### Opgave 3

- a) Anta at en nøytronstjerne er kuleformet med radius R, volum

$$\Omega = 4\pi R^3 / 3,$$

og total masse M, og består av en ideell gass av nøytroner, dvs. "neutron matter". Betrakt nøytron-gassen som en ideell relativistisk Fermi-gass i grunntilstanden, og finn total energi uttrykt ved M og R, dvs. ved størrelsene

$$\bar{M} = (9\pi / 4m)M,$$

$$\bar{R} = (mc / \hbar)R,$$

for et relativistisk system, der

$$x_F = p_F / mc \gg 1,$$

$p_F$  er Fermi-impulsen, og  $m$  er nøytron-massen. Vis at trykket av Fermi-gassen kan skrives

$$P = (m^4 c^5 / 12\pi^2 \hbar^3) \left[ (\bar{M}^{4/3} / \bar{R}^4) - (\bar{M}^{2/3} / \bar{R}^2) \right].$$

- b) Beregn potensiell gravitasjonsenergi bundet i en stjerne (uttrykt ved  $M$  og  $R$ ), når vi antar at den har en konstant masse-tetthet  $\rho$ . Finn trykket tilsvarende gravitasjonskreftene, uttrykt ved  $\bar{M}$  og  $\bar{R}$ .
- c) Finn relasjonen mellom  $M$  og  $R$ , dvs  $\bar{R}$  som funksjon av  $\bar{M}$ , når vi antar at trykket i den relativistiske nøytron-gassen balanseres av gravitasjonsbindingen. Gir svaret en øvre eller nedre grense for stjernens totale masse? Hva blir denne grenseverdien?

Oppgitt:

$$\sqrt{1+x^2} \approx x \left[ 1 + (2x^2)^{-1} \right], \quad \text{for } x \gg 1,$$

$$P = - \partial E / \partial \Omega.$$

MERK:

Studentene må primært gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene. Evt. telefonhenvendelser om sensur må rettes til instituttet eller sensurtelefon: 815 48014.

Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike henvendelser.