NTNU
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet

EKSAMEN I MNFFYX2/V98 Svarte hull (MNFFY-450. Kompakte stjerner)

DATO: TIRSDAG 2. JUNI 1998 TID: 09.00 – 15.00

Antall vekttall: 4

Antall sider: 5

Sensur dato 23. Juni 1998

Oppgave 1

a) En lokal statisk observatør (i posisjon r) finner (ved målinger) at den radielle hastigheten til en partikkel med masse m i et kulesymmetrisk gravitasjonsfelt rundt en masse M er gitt ved

$$\begin{aligned} v^{\hat{r}} &= \left(c^2/\tilde{E}\right)(dr/d\tau) \\ &= \left[c^2 - \left(c^4/\tilde{E}^2\right)\left(1-2MG/rc^2\right)\left(c^2+\tilde{\ell}^2/r^2\right)\right]^{1/2}, \end{aligned}$$

der

$$\begin{aligned} \tilde{E} &= E/m, \\ \tilde{\ell} &= \ell/m, \end{aligned}$$

tilsvarer energi og dreieimpuls pr. masseenhet, m er partikkel-massen, τ er egentiden, c er lyshastigheten, og G er gravitasjonskonstanten. Vis at observatøren da får samme måleresultat som Newtonsk (ikke-relativistisk) mekanikk ville gi for en slik partikkel som starter med null hastighet i $r \longrightarrow \infty$.

b) Ligninger for energibevarelse og dreieimpuls-bevarelse for en partikkel med masse m i et slikt kulesymmetrisk gravitasjonsfelt rundt en masse M gir bevegelsesligningene (Euler-Lagrange-ligningene)

$$\begin{aligned} (dr/d\tau)^2 &= \left(\tilde{E}^2/c^2\right) - \left(1-2MG/rc^2\right)\left(c^2+\tilde{\ell}^2/r^2\right), \\ d\varphi/d\tau &= \tilde{\ell}/r^2, \\ dt/d\tau &= \tilde{E}/\left[\left(1-2MG/rc^2\right)c^2\right]. \end{aligned}$$

Vis at løsningen for en ren radialbevegelse innover og $\tilde{E} > c^2$ kan skrives

$$\tau(\eta) = -\left(R^3/8mG\right)^{1/2}(Sinh\,\eta - \eta),$$

når vi innfører en parameter η definert ved

$$r(\eta) = (Cosh\,\eta - 1)R/2,$$

og velger grensebetingelsene

$$\tau = 0, \qquad for\ r = 0,$$
$$dr/d\tau = 0, \qquad for\ r = -R.$$

Hva blir $\tau(R, M, r)$?

c) For ikke-radiell bevegelse kan vi innføre et "effektivt sentrifugal-potensial" $V(r)$ definert slik at bevegelsesligningen kan skrives

$$(dr/d\tau)^2 = \left(\tilde{E}^2/c^2\right) - V(r).$$

Vis at dette gir den ikke-relativistiske Newtonske bevegelsesligningen for

$$2MG/rc^2 \ll 1,$$

når vi tar hvilemasse-energien med i energi-regnskapet.

Oppgitt:

$$Sinh^2(x/2) = (Cosh\,x - 1)/2.$$
$$Cosh^2(x/2) = (Cosh\,x + 1)/2,$$
$$Sinh(arc\,Cosh\,x) = \left(x^2 - 1\right)^{1/2}.$$

Oppgave 2

a) Cygnus X-1 er en spektroskopisk dobbeltstjerne som består av en optisk synlig superkjempe HDE 226868 (med masse M_1) og en usynlig kompanjong (med masse M_2). Vi antar at gravitasjonskraften (tyngde-akselerasjonen) på overflaten av HDE 226868 er gitt ved

$$g = GM_1/R^2 = 1.6 \cdot 10^3\ cm/sek^2,$$

der R er stjernas radius, og G er gravitasjonskonstanten. Bruk uttrykkene

$$f = (M_2\,sin\,i)^3/(M_1 + M_2)^2,$$
$$R = 6.62 \cdot 10^6 \left(d[kpc]/1[kpc]\right) km,$$

til å finne (tilnærmet) en nedre grense for M_2 uttrykt ved solas masse $M_\odot$, hvis vi antar at $M_1 >> M_2$, og observasjoner gir parameter-verdiene

$$f = 0.252\ M_\odot,$$
$$d = 2\ \text{kpc},$$

der f er masse-funksjonen, og d er avstanden til stjerna. Hva blir denne grenseverdien for M_2 egentlig lik ved en mer nøyaktig tilpasning (løsning)?

b) En betingelse for en stabil dobbeltstjerne med en synlig og en usynlig komponent, kan være at

$$R < R_{Roche},$$

for den optisk synlige stjerna. En god approksimasjon kan her være

$$R_{Roche} = a\left[0.38 + 0.2 \ln\left(M_1 / M_2\right)\right] ,$$

der

$$a = \left(M_1 + M_2\right) a_1 / M_2 ,$$

hvor a_1 er den store halvakse i ellipsebanen til M_1, og a er tilsvarende størrelse for relativ-bevegelsen i dobbeltstjerna. Vis at en nedre grense for M_2 da er gitt ved et minimum for

$$M_2 = (1+q)^2 f / \sin^3 i,$$

med betingelsene

$$f_1 = (1+q)(0.38 + 0.2 \ln q) / \sin i > x,$$
$$f_2 = (1+q) \cos i / \sin i > x,$$

der

$$q = M_1 / M_2,$$
$$x = R / \left(a_1 \sin i\right),$$

når vi også antar (observerer) at det ikke er en formørkelsesvariabel dobbeltstjerne. (Funksjonene f_1 og f_2 er begge masse-funksjoner tilsvarende f definert for M_2).

c) Anta et kulesymmetrisk legeme (en stjerne) med masse M og radius R. Fotoner kan unnslippe fra overflaten til et slikt legeme innenfor en vinkel ψ mellom emisjonsretningen og en normal til overflaten, der

$$\sin\psi < 3^{3/2}\left(MG / rc^2\right)\left(1 - 2MG / rc^2\right)^{1/2},$$

for

$$2MG/c^2 < R < 3MG/c^2,$$

og c er lyshastigheten. Vis at for isotrop emisjon er utstrålingen proporsjonal med $\sin^2 \psi$, og at "black-body radius" R_∞ målt av en observatør i $r \to \infty$ blir lik

$$R_\infty = 3^{3/2} MG/c^2.$$

Oppgitt:

Solas masse: $M_\odot = 2 \cdot 10^{33}$ g,

Gravitasjonskonstanten: $G = 6.67 \cdot 10^{-8} cm^3 g^{-1} sek^{-2}$.

Oppgave 3

For hydrodynamisk kulesymmetrisk masse-overføring av gass til et stasjonært ikke-roterende svart hull med masse M, kan vi anta at gassen har en tilstandsligning

$$P = K\rho^\Gamma,$$

der P er trykket, ρ er masse-tettheten, og Γ er den adiabatiske indeksen. Lydhastigheten er da gitt ved

$$a = (dP/d\rho)^{1/2} = \left(\Gamma K \rho^{\Gamma-1}\right)^{1/2} = (\Gamma P/\rho)^{1/2}.$$

Skriv opp kontinuitetsligningen og Euler-ligningen som styrer masseoverføringen, og vis at integrasjon av Euler-ligningen gir en Bernoullis ligning (i posisjon r), for den gitte tilstandsligningen, lik

$$u^2/2 + a^2/(\Gamma - 1) - GM/r = a_\infty^2/(\Gamma - 1) = konstant,$$

der u er partikkel (masse)-hastigheten (strømnings-hastigheten), og G er gravitasjonskonstanten.

b) Vis at vi fra kontinuitetsligningen, Euler-ligningen og Bernoullis ligning kan finne en løsning for masseoverførings-hastigheten $\dot{M}$, dvs.

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho u = 4\pi\lambda_s \left(GM/a_\infty^2\right)^2 \rho_\infty a_\infty \quad ,$$

der

$$\lambda_s = (1/2)^{(\Gamma+1)/(2\Gamma-2)} \left[(5-3\Gamma)/4\right]^{-(5-3\Gamma)/(2\Gamma-2)},$$

og vi antar grensebetingelsene

$$u \to \begin{cases} \left(2GM/rc^2\right)^{1/2}, & for \quad r \to 0, \\ 0, & for \quad r \to \infty. \end{cases}$$

Vis at løsningen inkluderer et "kritisk punkt" definert ved en "transsonisk radius" r_S, tilsvarende et punkt der strømningshastigheten blir lik lydhastigheten. Hva blir r_S uttrykt ved Γ, G, M, og a_∞ ?

c) Vis at

$$\lambda_S = \begin{cases} e^{3/2}/4\ , & for \quad \Gamma = 1, \\ 1/4, & for \quad \Gamma = 5/3. \end{cases}$$

Oppgitt:

$$\lim_{x \to 0} x \ln x = 0,$$

$$\lim_{x \to 0} x^x = 1.$$

MERK: Studentene må primært gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene. Evt. telefonhenvendelser om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike henvendelser.