Eksamen. 2/6 – 98

Eksamen i FYX2-V98. Svarte hull. 2/6-98

(MNFFY-450. Kompakte stjerner)

Antydet løsning. Oppgave 1

a) En partikkel som faller fritt i r-retning i et kulesymmetrisk gravitasjonsfelt med de gitte grensebetingelser har ingen dreieimpuls, dvs.

$$l = 0, \quad \tilde{l} = 0.$$

Videre er egentiden for en lokal statisk observatør gitt ved

$$d\tau = (1 - 2MG/rc^2)^{1/2} dt,$$

og energien til en testpartikkel målt av denne observatøren blir lik

$$E_{lok} = (1 - 2MG/rc^2)^{-1/2} E,$$

slik at

$$\left.\begin{matrix} dt \to d\tau, \\ E_{lok} \to E, \end{matrix}\right\} \text{for } r \to \infty.$$

Når partikkelen slippes med null hastighet fra $r \to \infty$, får vi da

$$\tilde{E} = c^2,$$

$$\underline{\underline{v^{\hat{r}} = (2MG/r)^{1/2}}},$$

som er det samme resultat som i klassisk Newtonsk mekanikk, når vi setter kinetisk energi lik omformet potensiell energi, dvs.

$$\tfrac{1}{2} m v^2 = mMG/r, \qquad \underline{\underline{v^2 = 2MG/r}}$$

b) Den gitte bevegelsesligningen blir her (for beveg. innover)

$$dr/d\tau = \div \left[(\tilde{E}^2/c^2) - c^2 + (2MG/r) \right]^{1/2},$$

Med $\tilde{E} > c^2$, har partikkelen endelig hastighet for alle r, også starthastigheten for $r \to \infty$, og grensebetingelsen for $d\tau/d\tau$ gir oss ($dr/d\tau = 0$ for $r = R$, dvs)

$$\tilde{E}^2/c^2 - c^2 = 2MG/R,$$

dvs. bevegelsesligningen kan skrives

$$d\tau = -dr/[(2MG/r) + (2MG/R)]^{1/2} = -\sqrt{r}\,dr/[2MG + (2MG/R)r]^{1/2},$$

Parameteren η definert ved

$$r(\eta) = (\cosh\eta - 1)R/2 = R\cdot\sinh^2(\eta/2),$$

tilsvarer også

$$[1 + (r/R)]^{1/2} = \cosh(\eta/2),$$
$$\eta = \operatorname{arc}\cosh[(2r/R) + 1],$$

dvs. $r = R\cdot\sinh^2(\eta/2) = R[\cosh^2(\eta/2) - 1]$,

$$dr = R\cdot\cosh(\eta/2)\sinh(\eta/2)\,d\eta,$$
$$\tau = -(2MG)^{-1/2}\int\sqrt{r}\,dr/(1 + r/R)^{1/2}$$
$$= -(R^3/2MG)^{1/2}\int\sinh^2(\eta/2)\,d\eta = \underline{\underline{-(R^3/8MG)^{1/2}(\sinh\eta - \eta)}},$$

og $\underline{\underline{\tau(r) = -(R^3/8MG)^{1/2}\{2[(r/R) + (r/R)^2]^{1/2} - \operatorname{arc}\cosh[(2r/R) + 1]\}}}$,

siden $\sinh(\operatorname{arc}\cosh x) = (x^2 - 1)^{1/2}$.

c) For små hastigheter og svake gravitasjonsfelt vil hvilemasse-energien dominere, og i det Newtonske grensetilfellet kan vi skrive

$$d\tau \approx dt, \qquad |\tilde{E} - c^2| \ll c^2, \quad (\text{dvs. } \tilde{E} \approx c^2)$$

dvs. $\tilde{E}^2 - c^4 = (\tilde{E} - c^2)^2 + 2c^2(\tilde{E} - c^2) \approx 2c^2(\tilde{E} - c^2)$.

Størrelsen $\tilde{E} - c^2$ kan da fortolkes som ikke-relativistisk mekanisk (kinetisk) energi i klassisk forstand, dvs. total energi minus hvilemasse-energi. Det effektive sentrifugal-potensialet

$$V(r) = (1 - 2MG/rc^2)(c^2 + \tilde{L}^2/r^2)$$

Antydet løsning, Oppgave 1c (forts.)

kan også approksimeres for
$2MG/rc^2 \ll 1$,

dvs. $V(r) = c^2 + (1-2MG/rc^2)\tilde{l}^2/r^2 - 2MG/r \approx c^2 + \tilde{l}^2/r^2 - 2MG/r$

og innsatt i bevegelsesligningen gir det

$$(dr/d\tau)^2 = \tilde{E}^2/c^2 - V(r) = (\tilde{E}^2/c^2) - c^2 - V(r) + c^2$$
$$= (\tilde{E}^2 - c^4)/c^2 - [V(r) - c^2]$$
$$\approx 2(\tilde{E} - c^2) - \tilde{l}^2/r^2 + 2MG/r,$$

som er den klassiske bevegelsesligning gitt ved kinetisk og potensiell energi for partikkel-bevegelse i kule-symmetrisk gravitasjonsfelt, dvs. den oppfyller

$$T + V = \tfrac{1}{2}m[(dr/d\tau)^2 + \tilde{l}^2/r^2] - mMG/r = E - mc^2 = m(\tilde{E} - c^2).$$

Oppgave 2

a) For HDE 226868 er parametrene f og d ifølge observasjoner gitt ved

$$f = (M_2 \sin i)^3/(M_1 + M_2)^2 = 0.252\, M_\odot,$$
$$R^2 = (6.62\cdot 10^6\,\mathrm{km})^2 (d[\mathrm{kpc}]/1[\mathrm{kpc}])^2$$
$$= (4\cdot 6.62\cdot 10^{11})^2\,\mathrm{cm}^2 = 1.753\cdot 10^{24}\,\mathrm{cm}^2,$$

for $d = 2\,\mathrm{kpc}$.

Massen til HDE 226868 blir ifølge våre antagelser lik

$$M_1 = gR^2/G = 1.6\cdot 10^3 \cdot 1.753\cdot 10^{24}/(2\cdot 10^{33}\cdot 6.67\cdot 10^{-8})\, M_\odot$$
$$= 21.03\, M_\odot,$$

og vi får betingelsen

$$\sin i = [f(M_1 + M_2)^2]^{1/3}/M_2 < 1,$$
$$M_2^3 > f(M_1 + M_2)^2 = 0.252\,(21.03 + M_2)^2.$$

Hvis vi antar at $M_1 \gg M_2$, kan vi sette

$$M_2 > (0{,}252 \cdot 21{,}03^2)^{1/3} \cdot M_\odot = \underline{\underline{4{,}81\, M_\odot}}$$

Mer nøyaktig tilpasning gir $\underline{\underline{M_2 > 5{,}64\, M_\odot}}$

b) Vi får direkte at

$$f = (M_2 \sin i)^3 / (M_1 + M_2)^2 ,$$

dvs. $\underline{\underline{M_2 = (1+q)^2 f / \sin^3 i}}$, der $q = M_1/M_2$.

Betingelsen om ingen formørkelse gir

$$\cos i > R/a = R M_2 / (M_1 + M_2) a_1$$

$$= (R/a_1 \sin i)[M_2 \sin i/(M_1+M_2)],$$ siden $a M_2 = a_1(M_1+M_2)$ $(a = (1+q)a_1)$

dvs. $\underline{\underline{f_2 = (1+q)\cos i/\sin i > R/(a_1 \sin i) = x}}$,

og $R < R_{Roche} = a\,[0{,}38 + 0{,}2 \ln(M_1/M_2)]$,

gir $R < (1+q) a_1 (0{,}38 + 0{,}2 \ln q)$,

$\underline{\underline{f_1 = (1+q)(0{,}38 + 0{,}2 \ln q)/\sin i > R/(a_1 \sin i) = x}}$.

c) For $2MG/c^2 < R < 3MG/c^2$,

får vi grensen

$$\sin \Psi < 3\sqrt{3}\,(MG/rc^2)(1 - 2MG/rc^2)^{1/2} = 1 ,$$

for $r(1 - 2MG/rc^2)^{-1/2} = 3^{3/2}(MG/c^2)$.

Ved isotrop emisjon er fluksen som unnslipper i en bestemt retning innenfor en vinkel Ψ proporsjonal med

$$\int \cos\Psi \, d\Omega \sim \int^{\Psi} \cos\Psi \sin\Psi \, d\Psi \sim \underline{\underline{\sin^2\Psi}} ,$$

og $R_\infty = R(1 - 2MG/Rc^2)^{-1/2} = \underline{\underline{3^{3/2} MG/c^2}}$.

Antydet løsning. Oppgave 3

a] Masseoverføringen styres av kontinuitetsligningen

$$\nabla\cdot(\rho \underline{u}) = r^{-2} d(r^2 \rho u)/dr = 0,$$

og Euler-ligningen

$$u(du/dr) = -\rho^{-1}(dP/dr) - GM/r^2,$$

for konstant kulesymmetrisk massestrøm med hastighet $u>0$ innover mot sentrum. Integrasjon av Euler-ligningen gir en Bernoullis ligning for den gitte tilstandsligning lik

$$u^2/2 + a^2/(\Gamma-1) - GM/r = a_\infty^2/(\Gamma-1) = \text{konstant},$$

siden vi får

$$P = K\rho^\Gamma, \qquad dP/d\rho = \Gamma K \rho^{\Gamma-1},$$
$$dP/dr = \Gamma K \rho^{\Gamma-1}(d\rho/dr),$$
$$\rho^{-1}(dP/dr) = \Gamma K \rho^{\Gamma-2}(d\rho/dr) = (a^2/\rho)(d\rho/dr),$$
$$\int \rho^{-1}(dP/dr)\,dr = [\Gamma K/(\Gamma-1)]\rho^{\Gamma-1} = a^2/(\Gamma-1).$$

b] Integrasjon av kontinuitetsligningen gir en masseoverføringshastighet (uavhengig av r) lik

$$\dot{M} = 4\pi r^2 \rho u = \text{konstant}.$$

Med de gitte grensebetingelsene skriver vi kontinuitetsligningen og Euler-ligningen på formen

$$(d\rho/dr)/\rho + (du/dr)/u + 2/r = 0,$$
$$u(du/dr) + a^2(d\rho/dr)/\rho + GM/r^2 = 0,$$

som følger av

$$r^{-2} d(r^2\rho u)/dr = [2r\rho u + r^2 u(d\rho/dr) + r^2\rho(du/dr)]/r^2 = 0,$$
$$dP/dr = a^2(d\rho/dr).$$

Vi får da løsningene

$$du/dr = D_1/D, \qquad = u(2a^2/r - GM/r^2)/(u^2-a^2),$$
$$d\rho/dr = -D_2/D, \qquad = -\rho(2u^2/r - GM/r^2)/(u^2-a^2),$$

der
$$D_1 = (2a^2/r - GM/r^2)/\rho,$$
$$D_2 = (2u^2/r - GM/r^2)/u,$$
$$D = (u^2-a^2)/u\rho,$$

dvs. løsningen inkluderer et "kritisk punkt" definert ved
$$D_1 = D_2 = D = 0, \quad \text{for } r = r_s,$$
$$\underline{\underline{u_s^2 = a_s^2 = GM/2r_s,}}$$

som definerer en "transsonisk radius" eller et punkt hvor strømningshastigheten blir lik lydhastigheten. Innsatt i Bernoullis ligning gir det
$$a_s^2 = u_s^2 = [2/(5-3\Gamma)]\, a_\infty^2,$$
$$\underline{\underline{r_s = [(5-3\Gamma)/4](GM/a_\infty^2).}}$$

Med $\rho = \rho_\infty (a/a_\infty)^{2/(\Gamma-1)}$, siden $a^2 = \text{konst.}\cdot\rho^{\Gamma-1}$,

blir masseoverføringshastigheten lik
$$\underline{\underline{\dot{M} = 4\pi\rho_\infty u_s r_s^2 (a_s/a_\infty)^{2/(\Gamma-1)} = 4\pi\lambda_s (GM/a_\infty^2)^2 \rho_\infty a_\infty,}}$$

der
$$\underline{\underline{\lambda_s = (1/2)^{(\Gamma+1)/(2\Gamma-2)}\,[(5-3\Gamma)/4]^{-(5-3\Gamma)/(2\Gamma-2)}.}}$$

c) Med den gitte λ_s, får vi først
$$\lim_{\Gamma\to1} \lambda_s = \lim_{\Gamma\to1} [(1/2)^{(\Gamma+1)/(2\Gamma-2)} / [(5-3\Gamma)/4]^{(5-3\Gamma)/(2\Gamma-2)}.$$

Vi beregner her (av praktiske grunner, siden vi skal derivere i teller og nevner)
$$\lim_{\Gamma\to1}(\ln\lambda_s) = \lim_{\Gamma\to1} \{[(\Gamma+1)/(2\Gamma-2)]\ln(1/2) - [(5-3\Gamma)/(2\Gamma-2)]\ln[(5-3\Gamma)/4]\}$$
$$= \lim_{\Gamma\to1}\{-(\Gamma+1)\ln 2 - (5-3\Gamma)\ln[(5-3\Gamma)/4]\}/(2\Gamma-2).$$

Antydet løsning. Oppgave 3c. (forts.)

Derivasjon i teller og nevner gir

$$\lim_{\Gamma\to 1}(\ln \lambda_s) = \lim_{\Gamma\to 1}\{-\ln 2 + 3\ln[(5-3\Gamma)/4] - (-3)\}/2$$
$$= [-\ln 2 + 3\ln(1/2) + 3]/2 = 3/2 - \ln 4,$$

dvs.

$$\lim_{\Gamma\to 1}\lambda_s = \underline{\underline{e^{3/2}/4.}}$$

Tilsvarende får vi

$$\lim_{\Gamma\to 5/3}\lambda_s = \lim_{\Gamma\to 5/3}\left\{(1/2)^{(\Gamma+1)/(2\Gamma-2)} / [(5-3\Gamma)/4]^{(5-3\Gamma)/(2\Gamma-2)}\right\},$$

For telleren får vi

$$\lim_{\Gamma\to 5/3}(1/2)^{(\Gamma+1)/(2\Gamma-2)} = 1/4.$$

For nevneren får vi

$$\lim_{\Gamma\to 5/3}[(5-3\Gamma)/4]^{(5-3\Gamma)/(2\Gamma-2)}$$
$$= \lim_{\Gamma\to 5/3}\left\{[(5-3\Gamma)/4]^{(5-3\Gamma)/4}\right\}^{2/(\Gamma-1)} = 1,$$

siden

$$\lim_{x\to 0} x^x = 1$$
$$\lim_{x\to 0} x\ln x = 0,$$

dvs.

$$\lim_{\Gamma\to 5/3}\lambda_s = \underline{\underline{1/4}}.$$

(Kan også ~~først~~ vise at $\lim_{\Gamma\to 5/3}(\ln\lambda_s) = \ln(1/4) - \ln(1)\ldots$)

Tillegg til 3b]: λ_s kan finnes slik:

$$\dot{M} = 4\pi\rho_\infty u_s r_s^2 (a_s/a_\infty)^{2/(\Gamma-1)},$$

der

$$(a_s/a_\infty)^2 = 2/(5-3\Gamma) = (1/2)[4/(5-3\Gamma)],$$
$$r_s^2 = [(5-3\Gamma)/4]^2 (GM/a_\infty^2)^2$$
$$u_s = [2/(5-3\Gamma)]^{1/2} a_\infty = (1/2)^{1/2}[4/(5-3\Gamma)]^{1/2} a_\infty,$$

dvs.

$$u_s r_s^2 (a_s/a_\infty)^{2/(\Gamma-1)} = [(5-3\Gamma)/4]^{\cancel{-1/2}+2-1/(\Gamma-1)}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{1/2+1/(\Gamma-1)} a_\infty (GM/a_\infty^2)^2$$
$$= \underbrace{\left(\tfrac{1}{2}\right)^{(\Gamma+1)/2(\Gamma-1)}\left(\tfrac{5-3\Gamma}{4}\right)^{(3\Gamma-5)/2(\Gamma-1)}}_{\lambda_s}(GM/a_\infty^2)^2 a_\infty = \lambda_s (GM/a_\infty^2)^2 a_\infty.$$