Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Intistutt for fysikk

EKSAMEN I: MNFFYX3/V99 – HVITE DVERGER (MNFFY-450, Kompakte stjerner)

DATO: FREDAG 4. JUNI 1999

TID: 09.00 - 15.00

Antall vekttall: 4

Antall sider: 4

Tillatte hjelpemidler: Matematiske tabeller, kalkulator

Sensurdato: 25. Juni 1999

Oppgave 1

a. Den viktigste korreksjonen til tilstandsligningen for idell gass ved store tettheter i hvite dverger kan skyldes invers "β-decay", dvs. reaksjonen

$$e^- + p \rightarrow n + \nu,$$

der proton og nøytron kan være bundet i atomkjerner. Prosessen kan foregå når elektronet har større energi enn

$$(m_n - m_p)c^2 = 1.29 \text{ MeV},$$

der m_n er nøytron-massen, m_p er proton-massen, og c er lyshastigheten. Vis at et krav om likevekt for invers "β-decay" kan gi oss betingelsen

$$(m_e^2 + m_p^2 x_p^2)^{1/2} + m_p(1 + x_p^2)^{1/2} = m_n(1 + x_n^2)^{1/2},$$

for blandingsforholdet mellom partiklene, der m_e er elektron-massen, og x_n og x_p er gitt ved

$$x_n = p_F^n / m_n c,$$
$$x_p = p_F^p / m_p c,$$

og p_F^n og p_F^p er Fermi-impulsene til et nøytron og et proton.

b. Vis at betingelsen under a. gir et proton-nøytron-forhold for partikkel-tettheten lik

$$n_p / n_n \approx \left\{\left[1 + \left(4Q / m_n x_n^2\right) + 4\left(Q^2 - m_e^2\right) / \left(m_n^2 x_n^4\right)\right] / \left[1 + \left(1 / x_n^2\right)\right]\right\}^{3/2} / 8,$$

der

$$Q = m_n - m_p.$$

c. Vis at forholdet får en minimumsverdi lik

$$\left(n_p / n_n\right)_{min} = \left\{\left(Q / m_n\right) + \left[\left(Q^2 - m_e^2\right)^{1/2} / m_n\right]\right\}^{3/2},$$

for

$$n_n = \left(2^{3/2} / 3\pi^2\lambda_n^3\right)\left[\left(Q^2 - m_e^2\right) / m_n^2\right]^{3/4},$$

der

$$\lambda_n = \hbar / m_n c$$

er Compton-bølgelengden. Hva blir blandingsforholdet

$$n_e : n_p : n_n$$

for meget store tettheter

$$\rho_0 \to \infty,$$

der

$$\rho_0 \approx m_n n_n ?$$

Oppgave 2

a. En hvit dverg med total masse M og total radius R betraktes som en gass med tetthet $\rho(r)$ som holdes sammen i hydrostatisk likevekt av gravitasjonskrefter. De hydrostatiske likevektsbetingelsene er da gitt ved

$$dm/dr = 4\pi r^2 \rho,$$
$$dP/dr = -Gm\rho/r^2,$$

der r er radius, m(r) er masse, P(r) er trykk, $\rho(r)$ er masse-tethet, og G er gravitasjonskonstanten. Anta at tilstandsligningen dessuten er gitt ved en polytrop, dvs.

$$P = K\rho^{\Gamma},$$

der K og Γ er konstanter, og innfør de dimensjonsløse størrelsene θ og ξ definert ved

$$\rho = \rho_c \theta^n,$$
$$r = a\xi,$$

der ρ_c er sentral tetthet $\rho(0)$. Vis at de hydrostatiske likevektsligningene da kan kombineres og omformes til Lane-Emden-ligningen

$$\xi^{-2} d\left[\xi^2 \left(d\theta / d\xi\right)\right] / d\xi = -\theta^n,$$

og finn tilsvarende verdier for $\Gamma(n)$ og $a(n,\rho_c,K)$.

b. Finn total masse M og total radius R som funksjon av n, ρ_c, ξ_1 og $\theta'(\xi_1)$, der ξ_1 tilsvarer stjernens overflate definert ved

$$P = \rho = 0, \quad \text{for } \xi = \xi_1,$$

dvs.

$$\xi_1 = R/a.$$

c. Vis at forholdet mellom midlere tetthet $\overline{\rho}$ og sentral tetthet ρ_c er gitt ved

$$\overline{\rho}/\rho_c = 3|\theta'(\xi_1)|/\xi_1.$$

Vis at

$$M \sim R^{-3},$$

for ikke-relativistisk ideell Fermi-gass, dvs. for

$$\Gamma = 5/3.$$

Oppgave 3

a. Gravitasjonspotensialet Φ oppfyller Poissons ligning

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho.$$

En perturbasjon i gravitasjonsfeltet Φ er da gitt ved

$$\nabla^2\delta\Phi = 4\pi G\delta\rho,$$

der G er gravitasjonskonstanten og ρ er masse-tettheten, dvs

$$\delta\Phi = -G\int\delta\rho'\left|\underline{x}-\underline{x}'\right|^{-1}d^3x' = G\int\left[\nabla'\cdot(\rho'\xi')\right]\left|\underline{x}-\underline{x}'\right|^{-1}d^3x',$$

der ξ representerer en Lagrange-forskyvning $\xi(\underline{x},t)$, når

$$x \to x + \xi(\underline{x},t),$$

og

$$\delta\rho = -\nabla\cdot(\rho\xi).$$

Vis at for radielle perturbasjoner av en kuleformet stjerne (hvit dverg) gjelder

$$\nabla_i \delta\Phi = -4\pi G\rho\xi^i.$$

b. Ligningen for hydrostatisk likevekt følger fra ligningen for impulsbevarelse, som gir

$$\nabla P + \rho\nabla\Phi = 0,$$

og ligningen for radielle oscillasjoner på grunn av små perturbasjoner av en statisk likevekt i en kulesymmetrisk stjerne (hvit dverg) kan da skrives

$$\sum_j L_{ij}\xi^j = \sum_j \left[\nabla_i\left(\Gamma_i P \nabla_j \xi^j\right) - \left(\nabla_j \xi^j\right)\nabla_i P + \left(\nabla_i \xi^j\right)\nabla_j P - \rho\xi^j \nabla_j \nabla_i \Phi - \rho\nabla_i \delta\Phi\right]$$
$$= -\omega^2 \rho\xi^i,$$

der

$$\Gamma_1 = \partial(\ln P)/\partial(\ln\rho)$$

er den adiabatiske indeksen ved konstant entropi, og ω er frekvensen bestemt ved antatt tidsavhengighet

$$\xi^i \sim \exp(i\omega t).$$

Vis at egenverdi-ligningen for radielle oscillasjoner da kan skrives

$$d\left\{\Gamma_i P\left[d\left(r^2\xi\right)/dr\right]/r^2\right\}/dr - (4/r)(dP/dr)\xi + \omega^2\rho\xi = 0.$$

c. Vis at ligningen

$$d\left\{\Gamma_i P\left[d\left(r^2\xi\right)/dr\right]/r^2\right\}/dr - (4/r)(dP/dr)\xi + \omega^2\rho\xi = 0,$$

har en løsning uten noder (dvs. grunn-moden) gitt ved

$$\omega^2 = 0,$$
$$\xi = K \cdot r,$$

der K er en konstant, for

$$\Gamma = 4/3.$$

Oppgitt: $\nabla^2\left(1/|\underline{x} - \underline{x}'|\right) = -4\pi\delta\left(\underline{x} - \underline{x}'\right).$

MERK:
Studentene må primært gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene. Evt. telefonhenvendelser om sensur må rettes til Institutt for fysikk, Lade, eller sensurtelefon: 815 48014. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike henvendelser.