Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
Institutt for fysikk

BOKMÅL

EKSAMEN I: MNFFYX2 / V00 - Nøytronstjerner (MNFFY- 450. Kompakte stjerner)

DATO: LØRDAG 10/6 – 2000

TID: 09.00 – 15.00

Antall vekttall: 4

Antall sider: 4

Tillate hjelpemidler:
Matematiske tabeller,
kalkulator

Oppgave 1

a) Vekselvirkningen mellom to nukleoner kan approksimeres ved en (konstant) potensialbrønn med dybde V_o og rekkevidde b, dvs.

$$V(r)=\begin{cases} -V_0, & \text{for} \quad r<b, \\ 0, & \text{for} \quad r>b, \end{cases}$$

og sannsynligheten for å finne to nukleoner innenfor en avstand b fra hverandre i en kuleformet atomkjerne med radius r, kan da settes lik

$$P\,(b,R) = \begin{cases} (b/R)^3 \quad [1-(9/16)\,(b/R)+(1/32)\,(b/R)^3], & \text{for} \quad R > b/2, \\ 1, \quad \text{for} & R < b/2. \end{cases}$$

Vis at total energi for et system (en atomkjerne) med A slike (ikke-relativistiske) nukleoner og konstant tetthet kan skrives

$$E = T + W = \alpha\, A^{5/3} / R^2 - A\,(A-1)\;(V_o/2)\;\;P(b,R),$$

der

$$\alpha = (3/10)\,(9\pi/8)^{2/3}\,(\hbar^2/m).$$

b) Hva blir P(b,R) for b << R? Hvorfor?
Vis at vi ikke kan finne en stabil likevektstilstand for R<b/2.

c) Finn R (b) ved likevekt (for R > b/2), når vi antar at

$$A\,(A-1)\,(V_{o}/2)\,b^2 \gg \alpha\, A^{5/3}.$$

Hvordan passer svaret med eksperimentelle resultater? Hvorfor ? For hvilke R(b) har energien en maksimumsverdi ?

Oppgave 2

a) I en magnetisk (Goldreich-Julian) dipol-modell for pulsarer er dipol-feltet utenfor en nøytronstjerne gitt ved

$$\underline{B}^{(u)} = B_p R^3 \left[(\cos\theta / r^3)\, \underline{\hat{e}_r} + (\sin\theta / 2r^3)\, \underline{\hat{e}_\theta} \right],$$

der B_p er feltstyrken ved magnetpolene på overflaten av stjernen, og R er stjerne-radien. Vis at diskontinuiteten i den elektriske feltkomponenten normalt på overflaten tilsvarer en overflate-ladningstetthet lik

$$\sigma = -(B_p\, \Omega\, R / 4\pi c)\cos^2\theta.$$

b) Finn en øvre grense for overflatetemperaturen til nøytronstjernen i Krabbe-pulsaren, ved å anta at tap av rotasjonsenergi utsendes som termisk stråling fra overflaten, når radius og treghetsmoment er lik

R = 12 km,
$I = 1.4 \cdot 10^{45}$ g cm^2?

Krabbe-pulsarens periode er gitt ved

P = 0.0331 sek,
$P/\dot{P}$ = 2486 år.

c) Anta at spenningsenergien utløst ved stjerneskjelv kan finnes fra energi-uttrykket

$$E = E_o + A\varepsilon^2 + J^2(1-\varepsilon)/(2\,I_o) + B(\varepsilon - \varepsilon_o)^2,$$

der E_o er energien til en ikke-roterende stjerne, I_o er tilsvarende treghetsmoment, A definerer gravitasjonsenergi, B definerer spenningsenergi, og ε er en deformasjons-parameter som definerer treghetsmomentet for den roterende stjernen lik

$$I = I_o\,(1+\varepsilon).$$

Vis at energien utløst i et "stjerneskjelv" kan skrives

$$\Delta E = 2\,(A + B)\,(\varepsilon_\circ - \varepsilon)\,\Delta\varepsilon, \quad \text{når } \varepsilon \to \varepsilon - \Delta\varepsilon, \text{ og } \varepsilon_0 \to \varepsilon_0 - \Delta\varepsilon_0,$$

når $\Delta\varepsilon$ er liten i forhold til ε, som angir deformasjonsparameteren like for skjelvet. ε_0 er deformasjonsparameteren som ville gi spenningsfri skorpe.

Oppgitt: $P_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2 = (2 - 3\sin^2\theta)/2$,
Stefan-Boltzmanns konstant: $\sigma = 5.67 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{Jm^{-2}\,sek^{-1}\,K^{-4}}$.
$\underline{E} = -\nabla\Phi$, der $\nabla^2\Phi = 0$.

<u>Oppgave 3</u>

a) Anta en idell Fermi-gass av ikke-relativistiske nøytroner (n) og protoner (p), og relativistiske elektroner (e), i nøytronstjerners indre for tettheter

$$\rho < \rho_c = 8 \cdot 10^{14}\ \mathrm{g/cm^3}.$$

Vis at Fermi-energiene er gitt ved

$$E_F'(n) = E_F(n) - m_n c^2 = E_F(e) = (3\pi^2)^{1/3}\,(m_e c^2)(\hbar / m_e c)\, n_e^{\,1/3},$$

$$E_F'(p) = E_F(p) - m_p c^2 = \left[E_F'(n)\right]^2 / 2 m_n c^2,$$

og at Fermi-impulsene er gitt ved

$$p_F(n) = [2\, m_n c^2\, E_F'(n)]^{1/2} / c,$$

$$p_F(p) = p_F(e) = E_F'(n)/c,$$

hvis vi antar likevekt for "β – decay"; $n \to p + e^- + \bar{\nu}_e$.

b) Myon-nøytrino-reaksjoner i nøytronstjerner må tas med i betraktninger når det kjemiske potensial for elektroner oppfyller

$$\mu_e > m_\mu c^2, \text{ for } \rho > \rho_c.$$

Vis at med likevektsbetingelsen

$$E_F(\mu) = E_F(e),$$

gjelder relasjonene

$$p_F(e)\, dp_F(e) = p_F(\mu)\, dp_F(\mu),$$

$$F = p_\mu^2\, dp_\mu / p_e^2\, dp_e = \begin{cases} 0, & for \quad \rho < \rho_c, \\ \{1 - [m_\mu c^2 / E_F(e)]^2\}^{1/2}, & for \quad \rho > \rho_c. \end{cases}$$

---

c) Temperaturer i nøytronstjerners indre kan for eksempel beregnes som funksjon av tiden hvis vi antar at materien består av en ideell gass av degenererte fermioner, dvs. i første approksimasjon nøytroner. Hvis vi neglisjerer vekselvirkninger mellom partiklene, er varmekapasiteten for et system av N partikler med masse m gitt ved

$$C_v = Nc_v = dU/dT\,\big|_{N,V} = \pi^2 [(x^2+1)^{1/2} / x^2]\, Nk(kT/mc^2),$$

der

$$x = p_F / mc.$$

Finn den totale termiske (indre) energi for et system av nøytroner, når vi antar at x er tilnærmet konstant. Hva blir da U for en nøytronstjerne med masse M og temperatur T? Hva blir den tilsvarende termiske (indre) energi U hvis vi antar at materien i nøytronstjernen består av relativistiske kvarker med partikkel-tettheter

$$n_u = n_d = n_s = n\,?$$