Eksamen i MNFFYX2/VCO. Nøytronstjerner. 10/6-2000

Antydet løsning. Oppgave 1

a) Partikkel-tallet er gitt ved

$$N = A = \frac{4\Omega}{(2\pi\hbar)^3}\int d^3p = \frac{4\Omega\cdot 4\pi}{8\pi^3\hbar^3}\int p^2 dp = \frac{2\Omega p_F^3}{\pi^2\hbar^3\cdot 3} = 2\Omega k_F^3/3\pi^2,$$

og midlere kinetisk energi for systemet blir

$$T = \frac{4\Omega}{(2\pi\hbar)^3}\int (p^2/2m)\, d^3p = \frac{4\Omega\cdot 4\pi}{8\pi^3\hbar^3\cdot 2m}\int p^4 dp = \frac{\Omega p_F^5}{\pi^2\hbar^3\cdot 5m} = \Omega\hbar^2 k_F^5/5\pi^2 m,$$

dvs.

$$n = N/\Omega = 2k_F^3/3\pi^2 = A/\Omega = 3A/4\pi R^3 \text{ (ved konst. tetthet)},$$

$$T/A = 3\hbar^2 k_F^2/10m = (3/10)(\hbar^2/m)(3\pi^2 n/2)^{2/3},$$

$$T = (3/10)(3\pi^2/2)^{2/3}(\hbar^2/m)\, A\, (3A/4\pi R^3)^{2/3} = \underline{\alpha A^{5/3}/R^2},$$

der

$$\alpha = (3/10)(3\pi^2/2)^{2/3}(3/4\pi)^{2/3}(\hbar^2/m) = \underline{(3/10)(9\pi/8)^{2/3}(\hbar^2/m)}.$$

Potensiell energi finnes ved å summere antall vekselvirkninger, dvs. midlere potensiell energi blir

$$W = -A(A-1)(V_0/2)P(b,R);$$

og

$$\underline{E = \alpha A^{5/3}/R^2 - A(A-1)V_0(b^3/2)\left[R^{-3} - (9b/16)R^{-4} + (b^3/32)R^{-6}\right]}$$

b) Vi får direkte sannsynligheten

$$\underline{P(b,R) \approx (b/R)^3 \quad \text{for } b \ll R},$$

Fysikalsk tilsvarer dette forholdet mellom "korrelasjonsvolumet" $\underline{4\pi b^3/3}$ og totalt kjerne-volum $\underline{4\pi R^3/3}$ som nukleonene kan fordele seg innenfor, når vi har en uniform og ukorrelert romlig fordeling.

Vi finner stabil likevekt for energi-minimum, dvs. for $\partial E/\partial R = 0$.

For $R < b/2$ får vi

$$P(b, R) = 1, \qquad E = \alpha A^{5/3}/R^2 - A(A-1)V_0/2,$$

$$\underline{\partial E/\partial R = -2\alpha A^{5/3}/R^3 \neq 0}, \quad \text{for } R \neq \infty,$$

dvs. vi har $\underline{\text{ikke noe } E(\text{min.}) \text{ for } R < b/2}$.

c) Generelt får vi (for $R > b/2$)

$$\begin{aligned}\partial E/\partial R &= -2\alpha A^{5/3}R^{-3} + A(A-1)V_0(b^2/2)[3R^{-4} - (9b/4)R^{-5} + (3b^3/16)R^{-7}] \\ &= -2\alpha A^{5/3}/R^3 + A(A-1)V_0(3b^2/2R^3)(b/R)[1-(3b/4R)+(b^3/16R^3)] \\ &= 0, \text{ for } \underline{b/R \approx 0}, \text{ eller for } \underline{1-(3b/4R)+(b^3/16R^3) \approx 0}\end{aligned}$$

E(min.) eller E(max.) bestemmes da av

$$\begin{aligned}\partial^2 E/\partial R^2 &= 6\alpha A^{5/3}R^{-4} + A(A-1)V_0(3b^3/2)[-(4/R^5)+(15b/4R^6)-(7b^3/16R^8)] \\ &= 6\alpha A^{5/3}/R^4 + A(A-1)V_0(6b^3/R^5)[-1+(15b/16R)-(7b^3/64R^3)],\end{aligned}$$

der

$$-1+(15b/16R)-(7b^3/64R^3) = 0, \text{ for } R = b/2.$$

Vi finner da at

$$1-(3b/4R)+b^3/16R^3 = 0 \text{ for } b/R = 2, \text{ dvs. } \underline{R \approx b/2};$$

Da er $\underline{\partial^2 E/\partial R^2 > 0 \; (\text{pga. } 6\alpha A^{5/3}/R^4), \text{ dvs. energi-minimum}}$ E(min.). Denne verdien for R er for liten ifølge eksperimenter, det skyldes manglende frastøtning i potensialet. Vi finner videre at (med $A-1 \approx A$), der

$$2\alpha A^{5/3} \approx A(A-1)V_0(3b^3/2R) \text{ for } b/R \approx 0, \text{ dvs. } \underline{\underline{R \approx \frac{3V_0 b^3 A^{1/3}}{4\alpha} \gg b}}$$

Da er $\underline{\partial^2 E/\partial R^2 < 0, \text{ dvs. energi-maksimum } E(\text{max.})}$

Antydet løsning. Oppgave 2

a) Det magnetiske dipol-feltet utenfor nøytronstjernen er gitt ved

$$\underline{B}^{(u)} = B_p R^3 [(\cos\theta/r^3)\hat{\underline{e}}_r + (\sin\theta/2r^3)\hat{\underline{e}}_\theta],$$

der B_p er feltstyrken ved magnetpolene på overflaten av stjernen, og R er stjerne-radien. Uten overflate-strømmer er både normal-komponenten og tangential-komponenten kontinuerlig gjennom overflaten, dvs.

$$\underline{B}^{(i)}(R) = \underline{B}^{(u)}(R) = B_p[\cos\theta\,\hat{\underline{e}}_r + (\sin\theta/2)\,\hat{\underline{e}}_\theta].$$

Hvis vi antar (uendelig) stor ledningsevne inne i stjernen, er Lorentz-kraften lik null, dvs.

$$\underline{E}_i + \underline{\Omega}\times\underline{r}\times\underline{B}_i/c = 0,$$

dvs. ved overflaten er det elektriske feltet

$$\underline{E}^{(i)} = -(\underline{\Omega}\times\underline{R}\times\underline{B}^{(i)})/c = (R\Omega B_p\sin\theta/c)[(\sin\theta/2)\hat{\underline{e}}_r - \cos\theta\,\hat{\underline{e}}_\theta]$$

da

$$\underline{\Omega}\times\underline{r} = \Omega\hat{\underline{e}}_z\times r\hat{\underline{e}}_r = \Omega r\sin\theta\,\hat{\underline{e}}_\phi.$$

Tangential-komponenten til det elektriske feltet er også kontinuerlig gjennom overflaten av stjernen, dvs.

$$E_\theta^{(u)}(R) = E_\theta^{(i)}(R) = -R\Omega B_p\sin\theta\cos\theta/c,$$

som kan skrives

$$E_\theta^{(u)}(R) = \partial(R^2\Omega B_p\sin^2\theta/2c)/R\partial\theta = \partial[(R^2\Omega B_p/3c)P_2(\cos\theta)]/R\partial\theta,$$

siden $P_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2 = (2 - 3\sin^2\theta)/2$.

Hvis vi antar at vi kan uttrykke $\underline{E}$ utenfor stjernen på vanlig måte som

$$\underline{E}^{(u)} = -\nabla\Phi, \qquad \nabla^2\Phi = 0,$$

krever grensebetingelsen for $E_\theta^{(u)}(R)$ at

$$\Phi = -(B_p\Omega/3c)(R^5/r^3)P_2(\cos\theta),$$

som er et kvadrupol-felt. Derivasjon gir da det totale feltet $\underline{E}^{(u)}$ som

$$\underline{E}^{(u)} = \nabla\Phi = (B_p\Omega R^5/3c)\left[-(3/2)(3\cos^2\theta - 1)\hat{\underline{e}}_r - 3\sin\theta\cos\theta\,\hat{\underline{e}}_\theta\right]/r^4,$$

dvs. spranget i radial-komponenten normalt ved overflaten blir

$$\Delta E = E_r^{(u)}(R) - E_r^{(i)}(R) = (B_p\Omega R/2c)\left[-(3\cos^2\theta - 1) - \sin^2\theta\right]$$
$$= -(B_p\Omega R/c)\cos^2\theta,$$

som tilsvarer en overflate-ladningstetthet lik

$$\sigma = \Delta E/(4\pi) = \underline{\underline{-(B_p\Omega R/4\pi c)\cos^2\theta}}$$

b) Hvis vi antar

$$R = 12\ \text{km}, \qquad I = 1.4\cdot 10^{45}\ \text{g cm}^2,$$

for Krabbe-pulsaren, er rotasjonsenergien gitt ved

$$\Omega = 2\pi/P = 2\pi/0.0331\ \text{sek}^{-1} = 190\ \text{sek}^{-1},$$
$$E = I\Omega^2/2 = 1.4\cdot 10^{45}\cdot 190^2/2 = 2.5\cdot 10^{49}\ \text{erg} = 2.5\cdot 10^{42}\ \text{J},$$

og tapt rotasjonsenergi er gitt ved

$$\Omega/\dot{\Omega} = P/\dot{P}, \quad \dot{\Omega} = \Omega(\dot{P}/P) = 190/8\cdot 10^{10} = 2.4\cdot 10^{-9},$$
$$\dot{E} = I\Omega\dot{\Omega} = 1.4\cdot 10^{45}\cdot 190\cdot 2.4\cdot 10^{-9}\ \text{erg/sek} = 6.4\cdot 10^{38}\ \text{erg/sek},$$
$$(\dot{E} = I\Omega\dot{\Omega} = I\Omega^2(\dot{P}/P) = I(2\pi/P)^2(\dot{P}/P) = 4\pi^2 I\dot{P}/P^3)$$

Siden $P/\dot{P} = 2486$ år $= 2486 \cdot 365.25 \cdot 24 \cdot 3600$ sek $\approx 8 \cdot 10^{10}$ sek.

Fra Stefan-Boltzmanns lov får vi

$$\dot{E} = 4\pi R^2 \sigma T^4, \quad (= 4\pi^2 I \dot{P}/P^3)$$

og settes utstrålt energi lik tap av rotasjonsenergi, blir øvre grense for overflate-temperaturen lik

$$T \leq (\dot{E}/4\pi R^2 \sigma)^{1/4} = (6.4 \cdot 10^{33}/4\pi \cdot 12^2 \cdot 10^{10} \cdot 5.67 \cdot 10^{-5})^{1/4}$$

$$(6.2 \cdot 10^{29})^{1/4} K \approx \underline{\underline{3 \cdot 10^7 K}}$$

c) Vi bruker her uttrykket

$$E = E_0 + A\varepsilon^2 + J^2(1-\varepsilon)/2I_0 + B(\varepsilon - \varepsilon_0)^2$$

Minimalisering av energien, og dreieimpulsbevarelse gir

$$\partial E/\partial \varepsilon = 0, \quad \text{for} \quad \varepsilon = \frac{J^2}{4(A+B)I_0} + \frac{B\varepsilon_0}{A+B},$$

$$\Delta\varepsilon = \frac{B}{(A+B)} \Delta\varepsilon_0, \quad \text{dvs.} \quad B\Delta\varepsilon_0 = (A+B)\Delta\varepsilon,$$

$$\frac{J^2}{2I_0} = 2(A+B)\varepsilon - 2B\varepsilon_0.$$

Differansen mellom energien E_f rett før et skjelv og E_e like etter et skjelv blir da

$$E_f = E_0 + A\varepsilon^2 + J^2(1-\varepsilon)/2I_0 + B(\varepsilon - \varepsilon_0)^2,$$

$$E_e = E_0 + A(\varepsilon + \Delta\varepsilon)^2 + J^2(1 - \varepsilon - \Delta\varepsilon)/2I_0 + B[(\varepsilon - \varepsilon_0) + (\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_0)]$$

$$\Delta E = E_e - E_f \approx 2A\varepsilon\Delta\varepsilon - [2(A+B)\varepsilon - 2B\varepsilon_0]\Delta\varepsilon + 2B(\varepsilon - \varepsilon_0)(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon_0)$$

$$= -2B(\varepsilon - \varepsilon_0)\Delta\varepsilon_0 = \underline{\underline{2(A+B)(\varepsilon_0 - \varepsilon)\Delta\varepsilon}},$$

når vi antar $\Delta\varepsilon \ll \varepsilon$, og neglisjerer ledd av orden $(\Delta\varepsilon)^2$ (eller $(\Delta\varepsilon_0)^2 \ldots$).

Antydet løsning, Oppgave 3

a) Med mulighet for invers "β-decay", krever vi ved likevekt at

$$\mu_n = \mu_p + \mu_e,$$

der de kjemiske potensialene er gitt ved

$$\mu_n = [p_F^2(n)c^2 + m_n^2c^4]^{1/2},$$
$$\mu_p = [p_F^2(p)c^2 + m_p^2c^4]^{1/2},$$
$$\mu_e = [p_F^2(e)c^2 + m_e^2c^4]^{1/2}.$$

Innføres hjelpestørrelsene

$$x_n = p_F(n)/m_n c,$$
$$x_p = p_F(p)/m_p c,$$
$$x_e = p_F(e)/m_e c,$$

gir likevektsbetingelsen at

$$m_n(1+x_n^2)^{1/2} = m_p(1+x_p^2)^{1/2} + m_e(1+x_e^2)^{1/2}.$$

Krav om ladningsnøytralitet gir videre

$$n_p = n_e, \qquad x_p^3/3\pi^2\lambda_p^3 = x_e^3/3\pi^2\lambda_e^3,$$

der partikkel-tetthetene er gitt ved

$$n_p = p_F^3(p)/3\pi^2\hbar^3,$$
$$n_e = p_F^3(e)/3\pi^2\hbar^3,$$

og

$$\lambda_p \approx \lambda_n = \hbar/m_n c, \qquad \lambda_e = \hbar/m_e c,$$

dvs

$$m_p x_p = m_e x_e, \qquad p_F(p) = p_F(e).$$

Fermi-energiene er tilnærmet lik de kjemiske potensialene, og vi får

$$E_F(n) = E_F(p) + E_F(e),$$
$$E_F(n) \approx m_n c^2 + p_F^2(n)/2m_n,$$
$$E_F(p) \approx m_p c^2 + p_F^2(p)/2m_p,$$
$$E_F(e) \approx p_F(e)c,$$

siden elektronene er relativistiske, og protonene og neytronene er ikke-relativistiske. Ladningsneytralitet fører da til: $p_F^2(n)/2m_n \approx p_F^2(p)/2m_p + p_F(e)c \approx p_F(e)c$, dvs.

$$E_F'(n) = p_F^2(n)/2m_n \approx p_F(e)\cdot c = E_F(e), \qquad p_F(p) = p_F(e),$$
$$E_F'(p) \ll E_F'(n) = E_F(e), \qquad p_F(p) = p_F(e) \ll p_F(n),$$

dvs.

$$E_F'(n) = E_F(e) = p_F(e)c = (3\pi^2)^{1/3}\hbar c\, n_e^{1/3} = \underline{\underline{(3\pi^2)^{1/3}(m_e c^2)(\hbar/m_e c)n_e^{1/3}}},$$
$$E_F'(p) = p_F^2(p)/2m_p \approx [p_F^2(n)/2m_n c]^2/2m_n = \underline{\underline{[E_F'(n)]^2/2m_n c^2}},$$
$$p_F(n) = [2m_n E_F'(n)]^{1/2} = \underline{\underline{[2(m_n c^2)E_F'(n)]^{1/2}/c}},$$
$$p_F(p) = p_F(e) = E_F(e)/c = \underline{\underline{E_F'(n)/c}}.$$

b) Fermi-energiene er gitt ved

$$E_F(e) = [p_F^2(e)c^2 + m_e^2c^4]^{1/2} \to p_F(e)c,$$
$$E_F(\mu) = [p_F^2(\mu)c^2 + m_\mu^2 c^4]^{1/2} \to m_\mu c^2,$$

når myonene er ikke-relativistiske, dvs. ved likevekt får vi

$$\mu_e = \mu_\mu, \qquad E_F(e) = E_F(\mu),$$
$$p_F^2(e)c^2 + m_e^2c^4 = E_F^2(e) = E_F^2(\mu) = p_F^2(\mu)c^2 + m_\mu^2 c^4$$
$$p_F(e)\,dp_F(e) = p_F(\mu)\,dp_F(\mu).$$

For $\rho < \rho_c$, er $\mu_e < m_\mu c^2$, dvs.

$$p_F^2(\mu) = 0, \qquad F = p_F^2(\mu)dp_F(\mu)/p_F^2(e)dp_F(e) = 0.$$

For $\rho > \rho_{c}$, er $\mu_e > m_\mu c^2$, dvs.

$$F = p_F^2(\mu)\,dp_F(\mu)/p_F^2(e)\,dp_F(e)$$
$$= [p_F(\mu)\,dp_F(\mu)/p_F(e)\,dp_F(e)][p_F(\mu)/p_F(e)]$$
$$= [E_F^2(\mu)/c^2 - m_\mu^2 c^2]^{1/2}/[E_F^2(e)/c^2 - m_e^2 c^2]^{1/2}$$
$$\approx [E_F^2(\mu) - m_\mu^2 c^4]^{1/2}/[E_F^2(e)]^{1/2}$$
$$= \{[E_F^2(e) - m_\mu^2 c^4]/E_F^2(e)\}^{1/2} = \underline{\{1 - [m_\mu c^2/E_F(e)]^2\}^{1/2}}$$

c) Integrasjon gir direkte

$$U = \int C_V\,dT = \underline{\pi^2 (x^2+1)^{1/2} x^{-2} N k^2 T^2/2mc^2}.$$

For $x \ll 1$ får vi da

$$U \approx \pi^2 N k^2 T^2/2 m_n c^2 x^2, \quad \text{der } x = p_F(n)/m_n c.$$

For en nøytronstjerne med masse M får vi

$$M = N m_n, \quad N = M/m_n;$$
$$U = \pi^2 (M/m_n) k^2 T^2/2 m_n c^2 x^2 = \underline{\underline{\pi^2 M k^2 T^2/2 p_F^2(n)}}$$

For relativistisk kvark-materie er partikkel-tetthetene gitt ved

$$n_u = n_d = n_s = n_n, \quad \text{dvs.} \quad N_u = N_d = N_s = N/3.$$

Total termisk (indre) energi blir da, for $x \gg 1$:

$$U \approx \pi^2 N k^2 T^2/2 m_q c^2 x, \quad \text{der } x = p_F(q)/m_q c,$$

dvs.

$$M = N m_q = (N/3) m_n, \quad N = 3M/m_n, \quad m_q c x = p_F(q),$$
$$U = \pi^2 N k^2 T^2/2 p_F(q) c = \underline{\pi^2 (3M/m_n) k^2 T^2/2 p_F(q) c}$$
$$= \underline{\underline{3\pi^2 M k^2 T^2/2 m_n c\, p_F(q)}}$$

Ekstra kommentarer:

Oppgave 2a.

For å finne potensialet Φ fra den beregnete

$$E_\theta^{(u)}(R) = E_\theta^{(i)}(R) = -\Omega R B_p \sin\theta \cos\theta / c,$$

må vi bruke

$$\underline{E}^{(u)} = -\nabla\Phi, \quad \text{og} \quad \nabla^2\Phi = 0 \text{ (som burde vært oppgitt).}$$

Vi skriver da

$$E_\theta^{(u)}(R) = \partial(R^2\Omega B_p \sin^2\theta/2c)/R\partial\theta = \partial[(R^2\Omega B_p/3c)P_2(\cos\theta)]/R\partial\theta,$$

og antar følgende (p.g.a. kule-koordinater):

$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right),$$

$$\Phi = K\cdot r^{-n}P_2(\cos\theta), \quad \text{der} \quad P_2(\cos\theta) = \tfrac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\theta} = K\cdot r^{-n}(\partial P_2/\partial\theta), \quad \text{der} \quad \partial P_2/\partial\theta = -3\sin\theta\cos\theta,$$

$$\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) = \frac{3Kr^{-n}}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(-\cos\theta + \cos^3\theta)$$

$$= 3Kr^{-n-2}(3\cos^2\theta - 1) = 6Kr^{-n-2}P_2(\theta),$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -nKr^{-n-1}P_2(\cos\theta),$$

$$r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r} = -nKr^{-n+1}P_2(\cos\theta),$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -n(n-1)Kr^{-n}P_2(\cos\theta),$$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) = -Kn(n-1)r^{-n-2}P_2(\cos\theta).$$

Betingelsene $\nabla^2\Phi = 0$ og $\underline{E}^{(u)} = -\nabla\Phi$ gir da

$$n(n-1) = 6, \quad n = 3, \quad \text{og} \quad K = \frac{\Omega B_p R^5}{3c},$$

dvs.

$$\Phi = -(B_p\Omega/3c)(R^5/r^3)P_2(\cos\theta).$$