SIF 4002 Fysikk

15.8.98

Løsningsskisse

Oppg. 1a

Massen til vannet : $m = V \cdot \rho_{vann} = 5\,kg$

Temperaturforandring : $\Delta T = T_1 - T_0 = 60\,K$

Varmemengde $\underline{Q} = m C \Delta T = 5 \cdot 4{,}19 \cdot 10^3 \cdot 60 = \underline{\underline{1{,}257 \cdot 10^6\,J}}$ [1,26 MJ]

Elektrisk effekt : $P = V^2/R = 230^2/50 = 1{,}058 \cdot 10^3\,W$ [1,06 kW]

$P \cdot t = Q \Rightarrow \underline{t} = Q/P = \underline{1188\,s} = \underline{\underline{19\,min\ 48\,s}}$

Oppg. 1b

$\underline{H_0} = k \cdot A \cdot (T_1^0 - T_2^0)/d = 50 \cdot 0.04 \cdot 60/0.01 = \underline{\underline{12 \cdot 10^3\,W}}$ [12 kW]

Massen til isen : $m_{is} = (V_2/2) \cdot \rho_{is} = 5 \cdot 10^{-3} \cdot 0.92 \cdot 10^3 = 4.6\,kg$

Varmemengde for å smelte isen : $Q_{is} = m_{is} L_{is} = 4.6 \cdot 334 \cdot 10^3 = 1{,}536 \cdot 10^6\,J$

Dette tilføres ved kjøling av $V_1 = 10\,l$ vann $\rightarrow m_1 = 10\,kg$ vann ;

$Q_{is} = m_1 C_{vann} \Delta T_1$

$\Delta T_1 = Q_{is}/m_1 C_{vann} = 1{,}536 \cdot 10^6/(10 \cdot 4{,}19 \cdot 10^3) = 36{,}67\,K$

$\underline{T_1'} = T_1^0 - \Delta T_1 = 60 - 36.67 = \underline{\underline{23{,}33\,K}}$

$\underline{H_1} = k \cdot A \cdot (T_1' - T_2^0)/d = (23{,}33/60)\,H_0 = \underline{\underline{4{,}67 \cdot 10^3\,W}}$ [4,67 kW]

Oppg. 2a

Bølgelengden $\underline{\lambda} = c/f = 340/880 = \underline{\underline{0{,}386\,m}}$

Maksimum (konstruktiv interferens) : $\underline{r_B = r_A + k \cdot \lambda}$, $\underline{k = 1, 2, 3 \cdots}$

$r_B^2 = r_A^2 + h^2 \Rightarrow \cancel{r_A^2} + h^2 = \cancel{r_A^2} + 2k\lambda r_A + k^2\lambda^2$, det vil si

$\underline{r_A^k = (h^2 - k^2\lambda^2)/2k\lambda}$

Dette gir 5 positive løsninger:

k	1	2	3	4	5
r_A^k	4.983 m	2.202 m	1.146 m	0.521 m	0.069 m

Oppg. 2b

$v = \sqrt{S/\rho} \Rightarrow S = \rho v^2$

$\underline{S_1} = \rho c_1^2 = 7{,}9 \cdot 10^3 \cdot 206^2 = \underline{\underline{335{,}2 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$ [335,2 MPa]

$\underline{S_2} = \rho c_2^2 = \text{——"——} \cdot 225^2 = \underline{\underline{399{,}9 \cdot 10^6 \text{ Pa}}}$ [399,9 MPa]

Dette tilsvarer en töyning

$\Delta l / l = \Delta S / Y = (S_2 - S_1)/Y_{stål} = 323{,}5 \cdot 10^{-6}$

Denne er framkommet ved forskjellen i varmeutvidelseskoeffisient for stål og invar, $\Delta\alpha = \alpha_{stål} - \alpha_{invar}$;

$\Delta l / l = \Delta\alpha \cdot \Delta T$; det vil si

$\Delta\alpha = (\Delta l / l)/\Delta T = 323{,}5 \cdot 10^{-6}/30\text{K} = 10{,}78 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}$ – som gir

$\underline{\alpha_{stål}} = \Delta\alpha + \alpha_{invar} = (10{,}78 + 0{,}9) \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1} = \underline{\underline{11{,}7 \cdot 10^{-6} \text{ K}^{-1}}}$

Oppg. 3a

Ladningen $\underline{Q} = CV = (\varepsilon_0 A/d)V$

$= (8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 25 \cdot 10^{-4}/10^{-3}) \cdot 500 = \underline{\underline{11{,}06 \cdot 10^{-9} \text{ C}}}$ [11,06 nC]

Arbeidet som må utföres, er lik forskjellen i lagret el.stat. energi:

$\underline{W} = \frac{1}{2}Q^2/C_2 - \frac{1}{2}Q^2/C_1 = (\frac{1}{2}Q^2/C_1)(C_1/C_2 - 1)$

$= \frac{1}{2}(C_1^2 V^2/C_1)(d_2/d_1 - 1) = \frac{1}{2}(d_2/d_1 - 1) C_1 V^2$

$= \frac{1}{2} \cdot (2-1) \cdot (8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 25 \cdot 10^{-4}/10^{-3}) \cdot 500^2 = \underline{\underline{2{,}77 \cdot 10^{-6} \text{ J}}}$ [2,77 μJ]

Oppg. 3b.

Gauss lov : $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} \rightarrow \varepsilon_0 E(r) \cdot 4\pi r^2 = -Q$

$\underline{\underline{E(r) = -Q/4\pi\varepsilon_0 r^2}}$ [Coulombs lov for punktladning!]

$V = -\int_{r_1}^{r_2} E(r)\,dr = (Q/4\pi\varepsilon_0)\int_{r_1}^{r_2} r^{-2}\,dr = (Q/4\pi\varepsilon_0)(-1/r_2 + 1/r_1)$

$[r = d/2 \Rightarrow]$ $\underline{V} = \underline{\underline{(Q/2\pi\varepsilon_0 d_1)(1 - d_1/d_2)}}$

$\underline{C} = Q/V = \underline{\underline{2\pi\varepsilon_0 d_1/(1 - d_1/d_2)}}$

Tallverdier: $\underline{C} = 2\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12} \cdot 5 \cdot 10^{-2}/(1 - \frac{1}{2}) = \underline{\underline{5{,}56 \cdot 10^{-12}}}$ [5,56 pF]

$\underline{V} = Q/C = 5{,}6 \cdot 10^{-9}/5{,}56 \cdot 10^{-12} = \underline{\underline{10^3 \text{ V}}}$ [1 kV]

Oppg. 4a

Tyngdepunktet til staven ligger en avstand $\frac{1}{2}l$ fra topp-punktet, og svinger opp en høyde

$$h = \tfrac{1}{2} l\,(1-\cos\Theta_{max}) \approx \tfrac{1}{4} l\,\Theta_{max}^2$$

Tilført kinetisk energi E_{rot} er da gått helt over i potensiell energi;

$$\underline{E_{rot}} = Mgh \approx \underline{\tfrac{1}{4} M g l\,\Theta_{max}^2} \qquad \text{q.e.d.}$$

Rotasjonsenergien kan skrives som $\frac{1}{2}I\omega^2$, hvor ω er vinkelhastigheten rett etter at prosjektilet har passert

$$\tfrac{1}{2} I\omega^2 = \tfrac{1}{4} M g l\,\Theta_{max}^2 \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\tfrac{1}{2} M g l / I}\;\Theta_{max}$$

Dreieimpulsen $L = I\omega = \sqrt{\tfrac{1}{2} M g l I}\;\Theta_{max} = \sqrt{\tfrac{1}{2} M g l \cdot \tfrac{1}{3} M l^2}\;\Theta_{max}$

$$\underline{L = M\Theta_{max}\sqrt{g l^3/6}}$$

Dette er lik tilført dreieimpuls, som er $\Delta(mv)\cdot\frac{2}{3}l$, det vil si

$$\underline{\Delta(mv)} = \tfrac{3}{2} L/l = \underline{M\Theta_{max}\sqrt{3gl/8}}$$

Prosjektilets slutthastighet er

$$\underline{v_1} = v_0 - \Delta v = v_0 - (M/m)\,\Theta_{max}\sqrt{3gl/8}$$

$$= 400 - 1000\cdot(\pi/45)\sqrt{3\cdot 9.81\cdot 0.9/8} = 400 - 127 = \underline{\underline{273\ \mathrm{m/s}}}$$

Oppg. 4b

Dreiemomentet som virker på staven, i en vinkel Θ, er tyngdekraften $(M\vec{g})\times$(armen til tyngdepunktet om topp-punktet);

$$\tau = -Mg\cdot(l/2)\sin\Theta \qquad \text{[minus – fordi } \tau \text{ virker } \underline{\text{mot}}\ \Theta\text{-retning]}$$

Dreieimpulsligningen $\tau = I\ddot{\Theta}$ kan da skrives

$$\ddot{\Theta} + (Mgl/2I)\sin\Theta = 0$$

Med små Θ, kan $\sin\Theta \to \Theta$. Settes også inn $I = \frac{1}{3}Ml^2$, fåes

$$\underline{\ddot{\Theta} + \tfrac{3}{2}\tfrac{g}{l}\,\Theta = 0} \qquad \text{q.e.d.}$$

Dette er en standard svingeligning, av type $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$.

Perioden er $\underline{T} = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\Big/\sqrt{\tfrac{3}{2}\tfrac{g}{l}} = 2\pi\Big/\sqrt{\tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{9.81}{0.9}} = \underline{\underline{1.554\ \mathrm{s}}}$