Eksamen i SIF 4002 Fysikk

Onsdag 5. mai 1999

Løsningsskisse

Oppgave 1a

Høyde over midtstilling: $h_0 = l(1-\cos\theta_0)$

Potensiell energi: $m_A g h_0$ – som går til kin. energi W_f

$$\boxed{W_f = m_A g l (1-\cos\theta_0)}$$

$W_f = \frac{1}{2} m_A v_A^2$ og $L_f = l\, m_A v_A$ gir

$$\boxed{L_f = m_A l \sqrt{2gl(1-\cos\theta_0)}}$$

Total dreieimpuls er bevart i støtet:

$$\boxed{L_e = L_f}$$

Kinetisk energi: $\frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m^2 v^2 l^2 / m l^2 = \frac{1}{2} L^2 / m l^2 \quad (= \frac{1}{2} L^2 / I)$:

$$W_e = \frac{1}{2} L_e^2 / (m_A + m_B) l^2 \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{W_e = m_A g l (1-\cos\theta_0) \cdot [m_A / (m_A + m_B)]}$$

W_e går over til potensiell energi:

$$W_e = (m_A + m_B) g l (1-\cos\theta_1) \quad \Rightarrow$$

$$1-\cos\theta_1 = (1-\cos\theta_0)\, m_A^2 / (m_A + m_B)^2$$

$$\boxed{\theta_1 = \arccos\{1 - [m_A / (m_A + m_B)]^2 (1-\cos\theta_0)\}}$$

Tallverdi:

$$\underline{\theta_1} = \arccos\{1 - \tfrac{1}{4}(1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{2})\} = \arccos\{\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{8}\sqrt{2}\} = \underline{\underline{22^\circ}} \quad (0.385 \text{ rad})$$

Oppgave 1b

$$\vec{\tau} = \vec{l} \times M\vec{g} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\tau = -Mgl\sin\theta} \quad \text{(Negativt fortegn: } \tau \text{ virker \underline{mot} } \theta\text{-retning)}$$

* $\tau = I\, d\omega/dt = I\ddot{\theta}$, hvor (se oppgitte formler)
* $I = I_T + Ml^2 = \frac{2}{5} M R^2 + Ml^2$

gir differensialligning for θ – som med litt opprydding blir:

$$\boxed{\ddot{\Theta} + \left[\frac{g}{\ell} / \left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2}\right)\right] \sin\Theta = 0}$$

For små Θ – $\sin\Theta \to \Theta$ – blir dette ligning for harmonisk bevegelse med egen-vinkelfrekvens ω_0:

$$\omega_0 : \quad \omega_0^2 = \frac{g}{\ell} / \left(1 + \frac{2}{5}\frac{R^2}{\ell^2}\right)$$

Perioden er

$$\boxed{T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}\,\sqrt{1 + \tfrac{2}{5}(R/\ell)^2}}$$

Relativt avvik fra $T_M = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ er

$$\delta = (T - T_M)/T_M = \sqrt{1 + \tfrac{2}{5}(R/\ell)^2} - 1$$

som ved bruk av $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \varepsilon/2$ kan tilnærmes med

$$\delta \approx \tfrac{1}{5}(R/\ell)^2$$

Kravet $\delta < 1\%$ er oppfylt for

$$\boxed{R/\ell < \sqrt{0.05} = 0.22}$$

Oppgave 2a

1–2: konst. volum ; $pV/T = nR = \text{konst.} \Rightarrow p_2/T_2 = p_1/T_1$

$$\boxed{p_2 = p_1\, T_2/T_1}$$

1–3: adiabatisk ; $p_2 T_2 \to p_3 T_3 = p_1 T_1$

Bruker (oppgitte formler) $p^{1-\gamma}\, T^{\gamma} = \text{konst.}$

$$T_3^{\gamma} = T_2^{\gamma}(p_2/p_1)^{1-\gamma} = T_2^{\gamma}(T_2/T_1)^{1-\gamma} = T_1^{\gamma} \cdot T_2/T_1$$

$$\boxed{T_3 = T_1\,(T_2/T_1)^{1/\gamma}}$$

Q_H: Oppvarming ved konstant volum

$$\boxed{Q_H = n\,C_V\,(T_2 - T_1)}$$

Q_C: Avkjøling ved konstant trykk ($Q_C = -|Q_C|$)

$Q_C = n\,C_p\,(T_1 - T_3)$ – som kan skrives om til

$$\boxed{Q_C = \gamma\, n\, C_V\, T_1\,\left(1 - (T_2/T_1)^{1/\gamma}\right)}$$

Her er $C_p = \gamma C_V = C_V + R$, det vil si $\boxed{C_V = R/(\gamma - 1)}$

Arbeidet W er – etter 1. hovedsetning –

$$W = Q_H + Q_c \quad (= Q_H - |Q_c|)$$

som med innsetting for Q_H, Q_c og C_V kan skrives

$$\boxed{W = nRT_1 \{1 + [T_2/T_1 - \gamma (T_2/T_1)^{1/\gamma}] / (\gamma - 1)\}}$$

Virkningsgraden $e = W/Q_H = 1 + Q_C/Q_H$ – som kan skrives

$$\boxed{e = 1 - \gamma [(T_2/T_1)^{1/\gamma} - 1] / [T_2/T_1 - 1]}$$

Tallverdier: $\underline{\underline{W = 1{,}285 \text{ kJ}}}$; $\underline{\underline{e = 0{,}103}}$

Oppgave 26.

$dQ = dU + p dV = 0$ for adiabatisk prosess

Setter inn $dU = nC_V dT$ og $p = nRT/V$ – som gir

$nC_V dT + nRT dV/V = 0$ – og divisjon med $nC_V T \Rightarrow$

$dT/T + (R/C_V) dV/V = 0$ – det vil si

$d[\ln T + \ln V^{R/C_V}] = d \ln[T V^{R/C_V}] = 0$

$\underline{T V^{R/C_V} = \text{konst.}}$

R/C_V skal erstattes med $\gamma - 1$:

C_p : $(dQ)_{p=\text{konst}} \equiv nC_p dT = dU + (pdV)_{p=\text{konst}}$

Her $dU = nC_V dT$ (ideell gass – U bare avh. av T) –

og $pV = nRT \rightarrow d(pV)_{p=\text{konst}} = pdV + 0 = nRT$

det vil si $(pdV)_{p=\text{konst}} = nRT$. Dermed er

$nC_p dT = nC_V dT + nRT$ – det vil si

$C_p = C_V + R$ og $\underline{R/C_V} = C_p/C_V - 1 \equiv \underline{\gamma - 1}$

Dermed er det vist at

$$\boxed{T V^{\gamma - 1} = \text{konst}}$$

for adiabatisk prosess i ideell gass.

Oppgave 3

Volumet av tanken er $(\pi D^2/4)\cdot$ høyden – det vil si

$$\underline{y_o} = h_o + V_o/(\pi D^2/4) = \underline{1{,}009\ m}$$

Bernoullis ligning $\quad p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{konstant}$

gir – tatt ved vannoverflaten ($h = y$, $p = p_{atm}$, v = veldig liten)

og ved utløpet ($h = 0$, $p = p_{atm}$, $v = (D^2/d^2)\cdot v_{vannovefl.}$)

$$v^2 = 2gy \quad \text{– det vil si}$$

$$\boxed{v = \sqrt{2gy}}$$

(som for fritt fall – uavhengig av tapsfri strømning

$Q = v \cdot A$ med $A = \pi d^2/4$ gir

$$\boxed{Q = \pi d^2 \sqrt{2gy}}$$

Fallraten dy/dt – er gitt av (kontinuitetsligning):

$Q = -(dy/dt)\cdot(\pi D^2/4)$ – det vil si

$$\underline{dy/dt} = -(d^2/D^2)\,v = \underline{-(d^2/D^2)\sqrt{2gy}} \quad {}^{*)}$$

som kan skrives

$$\underline{dt = -[(D^2/d^2)/\sqrt{2g}]\; y^{-1/2}\, dy}$$

Integrasjon gir tømmetiden

$$\underline{t_o = \int_{y=y_o}^{h_o} dt = -(D^2/d^2)/\sqrt{2g}\; \left[2 y^{1/2}\right]_{y_o}^{h_o}}$$

$$\boxed{t_o = (D^2/d^2)\sqrt{2y_o/g}\,\left(1 - \sqrt{h_o/y_o}\right)}$$

Tallverdi (med $g = 9{,}81\ m/s^2$ – oppgitt i oppg. 1a)

$$\boxed{t = 2\ \text{min}\ 11\ s}$$

(Dette er for kort tid – vil en erfaren vintapper vite. Med 8 mm slange blir det betydelig trykktap i slangen pga. vannets viskositet).

---

* Faktor 10^3 mindre enn v; det vil si feilen ved å sløyfe v^2_{overfl}

Oppgave 4

Kule med masse M (skulle vært skrevet i oppgaveteksten) og radius R.

Ren rulling: $v = 2\pi R/T$ hvor $T = 2\pi/\omega$ $\Rightarrow$

$$\boxed{v = \omega R}$$

Kinetisk energi $W = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}(\frac{2}{5}MR^2)(v/R)^2$

$$\boxed{W = \frac{7}{10}Mv^2}$$

Rulling lengde l → høydetap $l\sin\Theta$ → tap i potensiell energi $V = Mgl\sin\Theta$. Energibevarelse $V \to W$ gir

$$Mgl\sin\Theta = \frac{7}{10}Mv_0^2$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{(10/7)gl\sin\Theta}}$$

Fra kanten er det fritt fall – når vi ser bort fra at kulas senter starter litt $(R\sin\Theta)$ utafor kanten, kan vi skrive

$$x(t) = v_{0x}t$$

$$y(t) = h + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

hvor $(v_{0x}, v_{0y}) = v_0(\cos\Theta, -\sin\Theta)$

og y er satt lik null når kula ligger på gulvet.

Falltiden t_0 fåes fra

$$h + v_{0y}t_0 - \frac{1}{2}gt^2 = 0$$ – hvor løsningen kan skrives

$$t_0 = -(v_{0y}/g)\left[\sqrt{1 + 2gh/v_{0y}^2} - 1\right]$$

Innsetting i $x = v_{0x}t_0$, og for (v_{0x}, v_{0y}) og v_0, gir

$$\boxed{x = \frac{10}{7}l\cos\Theta\left[\sqrt{\sin^4\Theta + \frac{7}{5}(h/l)\sin\Theta} - \sin^2\Theta\right]}$$

Tallverdi: $\underline{x = (5\sqrt{3}/28)(\sqrt{61/5} - 1)\text{ m}} = \underline{\underline{0.771\text{ m}}}$