NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET,
INSTITUTT FOR FYSIKK

EKSAMEN I FAG SIF4002 FYSIKK
LØSNINGSKISSE

Mandag 5. mai 2003
Tid: 0900 - 1500
Sensur uke 23.

Hjelpemidler:
B2 - Typegodkjent kalkulator,
Matematisk formelsamling (K. Rottmann),
Tabeller og formler i fysikk for 2FY og 3FY (Gyldendal)
NB: Det finnes et utvalg av formler bakerst i denne oppgaveteksten.

Oppgavene gitt i det følgende inneholder i alt 20 delspørsmål. Hvert av disse delspørsmålene teller like mye ved utregning av den endelige karakteren.

Oppgave 1

a) Enheten (dimensjonen) til DE fire grunnenheter i SI-systemet *meter* (m), *kilo* (kg), *sekund* (s) og *ampere* (A).

Skal likninga

$$a - b + c = 0, \tag{1}$$

ha fysisk mening nå alle parameterene ha samme enhet(dimensjon), dvs. man kan *ikke* ha at $a =$ hastighet, $b =$ masse og $c =$ tid.

b) Trykk = kraft per flateenhet. Fra Newtons andre lov er kraft gitt som $F = m\ddot{x}$, hvor m er masse og $\ddot{x}$ er akselerasjon, dvs. at enheten til kraft er kg m/s^2. Enheten til trykk $p = F/\text{areal}$ blir dermed

$$\underline{\underline{[\mathrm{p}] = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{ms}^2}}}. \tag{2}$$

Enheten til trykk i SI-systemet er Pascal (Pa) hvor

$$\underline{\underline{\mathrm{Pa} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}}}. \tag{3}$$

c) Innsatt for dimensjonene i likning

$$f = a^\alpha b^\beta c^\gamma. \tag{4}$$

gir

$$m/s = m^1 s^{-1} kg^0 = m^\alpha kg^\beta s^\gamma. \tag{5}$$

Dette gir direkte at

$$\underline{\underline{\alpha = 1, \quad \beta = 0 \quad \text{og} \quad \gamma = -1.}} \tag{6}$$

d) Superposisjonsprinsippet sier at hvis et system utsettes for to eller flere ytre påvirkninger, er den resulterende effekten alle de ytre påvirkninger lik summen av effekten når hver av påvirkningene virker hver for seg.

Eksempel 1: Når man har to høgtalere plassert på forskellige steder er lydtrykket i ethvert punkt lik summen av lydtrykket fra hver av høgtalerene.

Eksempel 2: Når en masse hengt opp i ei fjær utsettes for to hamoniske ytre krefter med ulik frekvens, er det resulterende utsvinget lik summen av utsvingene når kreftene virker hver for seg.

e) Gitt at dynamikken til en variabel y(t) er gitt ved likning

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f(t). \tag{7}$$

Antar så at $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ med

$$a\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + cy_1 = f_1(t) \quad \text{og} \quad a\ddot{y}_2 + b\dot{y}_2 + cy_2 = f_2(t). \tag{8}$$

Vil sjekke så om $y(t) = y_1 + y_2$ er en løsning av likning

$$a\ddot{y} + b\dot{y} + cy = f_1(t) + f_2(t). \tag{9}$$

Insetting gir at

$$\begin{aligned} a\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}^2\mathrm{t}}(y_1+y_2) + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(y_1+y_2) + c(y_1+y_2) &= \\ \underbrace{a\ddot{y}_1 + b\dot{y}_1 + cy_1}_{f_1(t)} + \underbrace{a\ddot{y}_2 + b\dot{y}_2 + cy_2}_{f_2(t)} &= f_1(t) + f_2(t), \end{aligned} \tag{10}$$

hvilket er lik det vi skulle vise.

Superposisjonsprinsippet er gyldig kun når koeffisientene a, b og c er konstanter, dvs. uavhengige av y og t.

Oppgave 2

a) Bevegelesesmengde til en punktmasse er $\underline{\underline{\vec{\boldsymbol{p}} := m\,\vec{\boldsymbol{v}}}}$, hvor m er massen og $\vec{\boldsymbol{v}}$ er hastigheten.

Newtons andre lov uttrykt ved bruk av bevegelesesmengden $\vec{\boldsymbol{p}}$ og ytre kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$

$$\underline{\underline{\vec{\boldsymbol{F}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\vec{\boldsymbol{p}}}}. \tag{11}$$

Newtons andre lov når ytre kraft $\vec{\boldsymbol{F}}$ er gitt

$$\underline{\underline{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{\boldsymbol{r}} = \frac{1}{m}\,\vec{\boldsymbol{F}}\,(\vec{\boldsymbol{r}}, t)}}, \tag{12}$$

hvor $\vec{\boldsymbol{r}}$ er punktmassens posisjonsvektor.

Newtons andre lov når akselerasjonen $\ddot{\vec{\boldsymbol{r}}}$ er gitt

$$\underline{\underline{\vec{\boldsymbol{F}}\,(\vec{\boldsymbol{r}}, t) = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{\boldsymbol{r}}}}. \tag{13}$$

b) Det stive legemet er tenkt delt opp i N mindre enheter hvor massen til del i er lik m_i og normalvektoren fra rotasjonsaksen til enhet i er $\vec{\boldsymbol{r}}_i$

Rotasjonsmengde: $\underline{\underline{\vec{\boldsymbol{L}} := \sum_{i=1}^N \vec{\boldsymbol{r}}_i \times m_i\,\vec{\boldsymbol{v}}_i}}$.

Dreiemoment: $\underline{\underline{\vec{\boldsymbol{T}} := \sum_{i=1}^N \vec{\boldsymbol{r}}_i \times \vec{\boldsymbol{F}}_i}}$.

Treghetsmoment: $\underline{\underline{I := \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\boldsymbol{r}}_i^{\,2}}}$.

Sammenhengen mellom rotasjonsmengde og dreiemoment: $\underline{\underline{\vec{\boldsymbol{T}} := I \, \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{L}}/\mathrm{d}t}}$.

c) Hvis det for en punktpartikkel eksisterer en skalar funksjon $V(\vec{\boldsymbol{r}})$ kjennetegnet ved at den ytre krafta på punktpartikkelen er gitt ved uttrykket

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\frac{\partial V(\vec{\boldsymbol{r}})}{\partial x} \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{x}} - \frac{\partial V(\vec{\boldsymbol{r}})}{\partial y} \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{y}} - \frac{\partial V(\vec{\boldsymbol{r}})}{\partial z} \vec{\boldsymbol{\delta}}_{\mathrm{z}} := -\frac{\partial}{\partial \vec{\boldsymbol{r}}} V(\vec{\boldsymbol{r}}) := -\nabla V(\vec{\boldsymbol{r}}), \tag{14}$$

da er $V(\vec{\boldsymbol{r}})$ et konservativt potensial.

For et hvert "rimelig glatt" potensial $V(\vec{\boldsymbol{r}})$ gir Taylor rekkeutvikling at følgende uttrykk

$$V(x) = V(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \ldots \tag{15}$$

er en god tilnærmelse for små verdier av $(x - x_0)$. Desto mindre $(x - x_0)$ er, jo bedre er tilnærmelsen. Når

$$\left.\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = 0, \tag{16}$$

betyr det at potensialet enten har et minimum eller et maksimum for $x = x_0$.

Når likning (xx) er oppfylt for $x = x_0$, kan potensialet for små utslag om likevekt uttrykkes som

$$V(x) = V(x_0) + \frac{1}{2} \left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \ldots. \tag{17}$$

Verdien $x = x_0$ svarer til et minimum i potensialet hvis $k > 0$ og et maksimum i potensialet hvis $k < 0$, hvor

$$k := \left.\frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_0}. \tag{18}$$

Dette medfører at $k > 0$ og $k < 0$ svarer til henholdsvis ei stabil likevekt og ei labil (ustabil) likevekt for $x = x_0$. Likning (3.2–9) har samme matematiske form som potensialet for ei fjær med fjærkonstant k. Er $k = 0$ pluss and alle høyereordensledd er lik null, har man ei *indifferent likevekt.*

d) De to likningene som kommer til anvendelse ved statisk likevekt av et stivt legeme er :

Kraftbalanse: $\sum_i \vec{\boldsymbol{F}}_i = \vec{\boldsymbol{0}}$.

Dreiemomentbalanse om vilkårlig valgt akse: $\sum_i \vec{\boldsymbol{T}}_i = \vec{\boldsymbol{0}}$.

Kraftbalanse for bjelken:

$$\sum \vec{\boldsymbol{F}}_i = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow F_{\mathrm{v}} + F_{\mathrm{h}} = (m_1 + m_2 + M)g. \tag{19}$$

Dreiemomentbalanse om høyre lager ("vilkårlig valgt akse"):

$$\sum \vec{\boldsymbol{\tau}}_i = \vec{\boldsymbol{0}} \Rightarrow (\ell_{\mathrm{a}} + \ell_{\mathrm{b}})(m_1 g) - \ell_{\mathrm{b}} F_{\mathrm{v}} + (\ell_{\mathrm{b}}/2)(M\,g) - \ell_{\mathrm{a}}(m_2 g) = 0. \tag{20}$$

Likningene (xx) og (xx) gir de to likningene vi trenger for bestemmelse av de to ukjente kreftene. Litt standard algebra gir

$$F_{\mathrm{v}} = Mg/2 + m_1 g(1 + \ell_{\mathrm{a}}/\ell_{\mathrm{b}}) - m_2 g \ell_{\mathrm{a}}/\ell_{\mathrm{b}} \tag{21}$$

$$F_{\mathrm{h}} = Mg/2 + m_2 g(1 + \ell_{\mathrm{b}}/\ell_{\mathrm{a}}) - m_1 g \ell_{\mathrm{b}}/\ell_{\mathrm{a}}. \tag{22}$$

e) Radiell hastighet $v = D/2\omega$, dvs.

$$\omega = 2\frac{v}{D} = \frac{2.085\text{km/time}}{66\text{cm}} = \frac{1.0 \cdot 85000\text{m}}{3600\text{s} \cdot 0.66\text{m}} = 35.77\frac{\text{radianer}}{\text{s}} \tag{23}$$

Dette gir følgende antall omdreininger per sekund:

$$\underline{\underline{\Omega = \omega/(2\pi) = 5.69 \ \text{omdreininger per sekund}}} \tag{24}$$

I og med at man kan se bort fra luftmotstandene, er det ytre dreiemoment om massefellespunktet til motorsykkellistens lik null. Den totale rotasjonsmengde til motorsykkel og førerer forbli derfor uendret under hoppet.

Den totale rotasjonsmengden består av rotasjonsmengdene til hvert av hjulene pluss rotasjonsmengden assosiert med endering i vinkelen θ.

Det å gi mer gass, øker rotasjonsmengden til bakhjulet, men rotasjonsmendgen til framhjulet forblir uendret. For at den totale rotatsjonsmengden skal forbli uendret, må sykkelen som helehet begynne å rotere i retning motsatt rotasjonsretningen til bakhjulet, dvs. θ vil øke.

Aktivering av håndbremsa på framhjulet reduserer rotasjonsmengden til fram hjulet, men rotasjonsmendgen til bakhjulet forblir uendret. For at den totale rotatsjonsmengden skal forbli uendret, må sykkelen som helehet begynne å rotere i samme retning forhjulet, dvs. θ vil redusers.

Oppgave 3

a) Bevegelseslikninga for stempel med olje-demping og koplet via ei lineær fjær til et fast punkt:

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = 0, \tag{25}$$

med følgende generell løsning:

For $\delta < \omega_0$ (underkritisk demping)

$$x(t) = A\exp\{-\delta t\}\cos(\omega_\text{d} t + \theta_0), \tag{26}$$

For $\delta > \omega_0$ (overkritisk demping)

$$x(t) = A^{(+)}\exp\{-\alpha^{(+)}t\} + A^{(-)}\exp\{-\alpha^{(-)}t\} \tag{27}$$

hvor $\delta = b/(2m)$, $\omega_\text{d} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$ og $\alpha^{(\pm)} = \delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$.

Parameterene A, ω_0, $A^{(+)}$ og $A^{(-)}$ er alle integrasjonskonstanter som bestemmes av startbetingelsene, dvs. $x(0)$ og $\dot{x}(0)$.

b) Bevegelseslikninga for stempel med olje-demping, koplet via ei lineær fjær til et fast punkt og under påvirkning av ei ytre kraft $f(t)$ er lik

$$m\ddot{x} + b\dot{x} + kx = f(t). \tag{28}$$

Den stasjonære løsning for denne bevegeleslikninga når $f(t) = F_0\cos(\omega t)$ et lik

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\delta^2\omega^2}}\cos(\omega - u) \tag{29}$$

Av likninga over følger at for samme amplitude F_0 for den ytre harmoniske krafta vil utsvinget $x(t)$ variere med frekvensen og for lav demping (liten δ) vil $x(t)$ ha et tydelig maksimum når $\omega \simeq \omega_0$. Det er dette fenomenet som refereres til som mekanisk resonans.

c) Ved angivelse av lydintensitet er decibel definert ved uttrykket

$$\text{decibel} := 10\log_{10}(I/I_\text{min}), \tag{30}$$

hvor I er lydintensiteten og I_min er intensiteten som svarer til høregrensa, dvs. den svakeste lyd ved frekvens 1000 Hz som kan oppfattes av et "normalt"mennskeøre.

d) Utsvinget $y(x,t)$

$$y(x,t) = y_0 \cos(kx)\cos(\omega t) \tag{31}$$

beskriver ei stående bølge hvor k er bølgevektoren (radianer/meter) og ω er vinkelfrekvensen (radianer/sekund).

e) Gitt at $y(x,t) = f(x \pm vt) = f(u)$, $\mathrm{d}f(u)/\mathrm{d}u := f'$ og $\mathrm{d}^2 f(u)/\mathrm{d}u^2 := f''$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial y}{\partial t} &= f'\frac{\partial u}{\partial t} = f' \cdot (-v) = -vf' \\
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega f''\frac{\partial u}{\partial t} = v^2 f'' \\
\frac{\partial y}{\partial x} &= f'\frac{\partial u}{\partial x} = f' \\
\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= f''\frac{\partial u}{\partial x} = f'',
\end{aligned} \tag{32}$$

som viser at for alle funksjoner $f(u)$ hvor f' og f'' eksisterer oppfyller $y(x,t) = f(x \pm vt)$ bølgelikninga

$$\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{33}$$

Parameter v er fasehastigheten til bølga. For harmonisk funksjon $y(x,t) = \sin(kx \pm \omega t)$ finner man at $v = \omega/k$.

Oppgave 4

a) Temperatur er et mål for midlere uordnede/kotisk kinetisk engergi per frihetsgrad i et materiale. Den absolutt temperatur T er direkte proporsjonal med denne energien.

$$T(\text{Kelvin}) = 273.15\text{grader} + T(\text{Celsisus}) \tag{34}$$

b) Varmelæras 1. hovedsetning : $Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W$ hvor Q er tilført varme, $\mathrm{d}U$ er økning i indre energi (kinetisk og potensiell energi) og $\mathrm{d}W$ er arbeid utført av systemet på omgivelsene.

Varmelæras 2. hovedsetning sier at det er umulige å gjøre om "uordnet/kaotisk varmeenergi på atomær-molekylær skala" til nyttig arbeid uten å legge inn tilleggsarbeid.

Noen alternative formuleringer:

- Det er umulig å flytte varme fra et kaldt til et varmt reservoar uten å utføre arbeid.
- Det er umulig å transformere varme til arbeid uten å tape spillvarme.
- Det er umulig å lage en kretsprosess som er mer effektiv enn Carnotprosessen.
- Perpetuum mobile av 2. art ("skape energi fra ingenting") er umulig.

c) Termisk utvidelse av et stålbru:

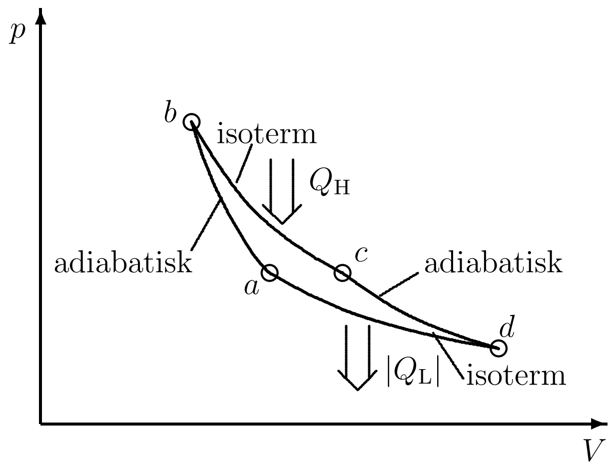
$\Delta\ell = \alpha\ \ell\ \Delta T = 1 \cdot 10^{-5}$ 1/K 100 m 60 K = 0.06 m

Strekkspenning: T= E $\Delta\ell/\ell = 2 \cdot 10^{11}$ Pa 0.06 m/100 m = $1.2 \cdot 10^{8}$ Pa.

1 atomosfære = 10 N/cm^2= 10^5 N/m^2 = 10^5 Pa $\Rightarrow$

T= $1.2 \cdot 10^8$ Pa / (10^5 Pa/atmosfære) = 1200 atmosfærer

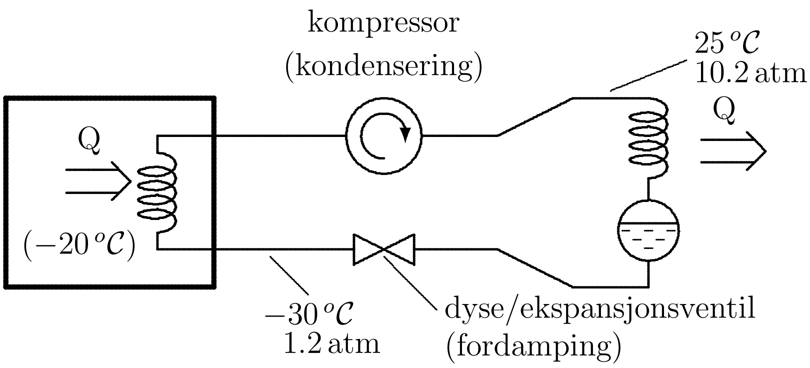
d)



Til venstre er vist en Carnot-prosess.
a–b: adiabatisk
b–c: isoterm
c–d: adiabatisk
d–a: isoterm

Denne prosessen er av stor prinsipiell betydning fordi den gir den teoretisk øvre grense for effektiviteten til varmekraftmaskiner.

e) Nedenfor er vist skjematisk et typisk kjøleanlegg, med amoniakk (NH_3) som kjølefluid.



Enkelt NH_3-anlegg

Virkemåten er i hovedsak som følger:

- NH_3 (amoniakk) sirkulerer i lukket rørsystem.
- Rørspiraler brukes som varmevekslere.
- Gass-væske likevekt både på høytemperatursida (T_H, p_H) og lavetemperatursida (T_L, p_L).
- I kondensatorspiralen avgis fordampningsvarme, og damp går over til væske.
- I dysa ekspanderer væske/damp adiabatisk, og kjøles ved avgivelse av fordampingsvarme fra væska.
- I kjølespiralen opptas varme fra omgivelsene (fryserommet), og fordamper mer av væska.
- og så komprimeres dampen (adiabatisk) i kompressoren, og vandrer tilbake til kondensatorspiralen, hvor opptatt varmemengde dyttes ut i omgivelsene.

Det er i prinsippet ikke noen forskjell på et kjøleanlegg og ei varmepumpe, bort sett fra at man i et kjøleanlegg legger den ønskede aktiviteten til kjølesida mens man for ei varmepumpe legger de ønskede aktiviteten på varmesida.