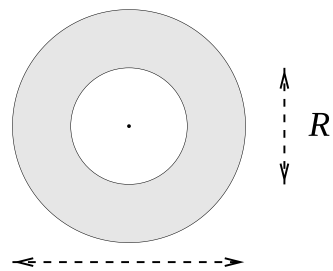
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Eksamen gitt av Kåre Olaussen

Løsningsforslag til
Eksamen i fag SIF4004 FYSIKK
FOR ELEKTROTEKNIKK OG TELEKOMMUNIKASJON
Onsdag 2. desember 1998
Tid: 09:00—15:00

Oppgave 1:

Et rett avkuttet kopperrør har ytre diameter $2R$, indre diameter R, og lengde R. Rørets masse er 10 kg. Skissen under indikerer røret sett fra den ene enden, men sylinderaksen (normalt på papirplanet) markert.



a) Beregn rørets treghetsmoment I om sylinderaksen. Uttrykk først svaret symbolsk ved rørets masse m og ytre radius R.

Rørets masse er

$$m = \int dm = 2\pi\rho R \int_{R/2}^{R} r dr = \pi\rho R^3 \left(1 - 2^{-2}\right), \tag{1}$$

der ρ er massetettheten for kopper. Rørets treghetsmoment er

$$I = \int dm\, r^2 = 2\pi\rho R \int_{R/2}^{R} r dr\, r^2 = \frac{1}{2}\pi\rho R^5 \left(1 - 2^{-4}\right).$$

Dvs.

$$\frac{I}{m} = \frac{R^2}{2}\frac{1-2^{-4}}{1-2^{-2}} = \frac{R^2}{2}\left(1 + 2^{-2}\right).$$

Altså

$$I = \frac{5}{8} m R^2. \tag{2}$$

Massetettheten til kopper er 8.96×10^3 kg/m^3. Hva blir den numeriske verdien for I?

Vi må bestemme den numeriske verdien for R. Fra ligning (1) får vi

$$R = \left(\frac{4m}{3\pi\rho}\right)^{1/3} = \left(\frac{4 \times 10}{3\pi \times 8.96 \times 10^3}\right)^{1/3} \text{ m} = 0.077\,952 \text{ m},$$

som innsatt i ligning (2) gir

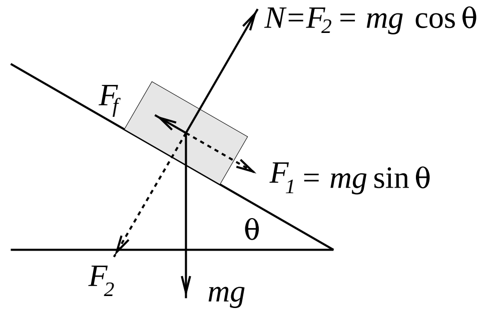
$$I = \frac{5}{8} m R^2 = 0.037\,978 \text{ kgm}^2. \tag{3}$$

b) Røret stilles på enden på et skråplan med helningsvinkel θ, som skissert på figuren på neste side. Den statiske friksjonskoeffisienten μ_S og glidefriksjonskoeffisienten μ_K kan antas å være like store,

$$\mu_S = \mu_K = 0.25. \tag{4}$$

Skissér hvilke krefter som virker på røret.

Figuren nedenfor indikerer hvilke krefter som virker på røret. (Siden vi her ikke skal beregne momenter av disse kreftene er ikke angrepspunktene for kreftene riktig markert.)



Tyngdekraften mg er dekomponert i en komponent $F_1 = mg\sin\theta$ langs skråplanet, og en komponent $F_2 = mg\cos\theta$ ortogonalt på det. Siden røret ikke kan bevege seg ortogonalt på skråplanet må der også virke en *føringskraft* $N = F_2$ fra skråplanet på røret. Assosiert med denne virker det en friksjonskraft $F_f = \mu_K N = \mu_K mg\cos\theta$ på røret (så lenge det sklir — $F_f \leq \mu_S N = \mu_S mg\cos\theta$ så lenge det er i ro).

Hvor stor er den minste verdi, θ_1, som helningsvinkelen θ kan ha før røret begynner å skli? Gi både symbolsk og numerisk svar.

For at røret skal begynne å skli må gravitasjonskraftens komponent langs skråplanet, F_1, overvinne den statiske friksjonskraften F_f, dvs

$$F_1 = mg\sin\theta \geq F_f = \mu_S mg\cos\theta.$$

Den minste vinkel, $\theta = \theta_1$, som gjør dette mulig oppfyller $\tan\theta_1 = \mu_S$. dvs.

$$\theta_1 = \arctan\mu_S = \arctan\frac{1}{4} = 0.244\,978 = 14.036°. \tag{5}$$

c) Skråplanet stilles i en vinkel $\theta = 30°$ (dvs. $\theta = \pi/6$).

Hvor lang tid tar det for røret å skli ned et skråplan på 20 m (målt langs skråplanet), når det starter fra ro? Hvor stor er slutthastigheten?

Oppgitt: Tyngdens akselerasjon kan settes til $g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$.

Bevegelsesligningen for røret er

$$m\ddot{s} = F_1 - F_f = mg\left(\sin\theta - \mu_K\cos\theta\right),$$

med løsning

$$s = \frac{1}{2}a_1\,t^2 = \frac{1}{2}g\left(\sin\theta - \mu_K\cos\theta\right)\,t^2, \tag{6}$$

så det tar en tid

$$t_1 = \left(\frac{2s}{a_1}\right)^{1/2} = \left[\frac{2s}{g(\sin\theta - \mu_K\cos\theta)}\right]^{1/2} = 3.792\,485\ \mathrm{s} \tag{7}$$

å skli en strekning $s = 20$ m fra ro.

Slutthastigheten blir

$$v_1 = a_1\,t_1 = (2a_1\,s)^{1/2} = \left[\,2gs\left(\sin\theta - \mu_K\cos\theta\right)\right]^{1/2} = 10.547\,175\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{8}$$

d) Hvor mye friksjonsarbeid ble utført mens røret skled ned skråplanet?

Friksjonsarbeidet under prosessen er

$$W = sF_f = smg\mu_K \cos\theta\, s = 424.785 \text{ J}. \tag{9}$$

Skråplanet antas å være en svært dårlig varmeleder, slik at alt friksjonsarbeid blir brukt til å varme opp kopperrøret. Spesifikk varmekapasitet for kopper er

$$c_{\text{kopper}} = 390 \text{ J/kg K}. \tag{10}$$

Hvor stor var temperaturøkningen i røret mens det skled ned skråplanet? Hvor stor ville den vært hvis røret istedet hadde veid 100 kg?

Hvis alt friksjonsarbeid brukes til å varme opp røret har vi

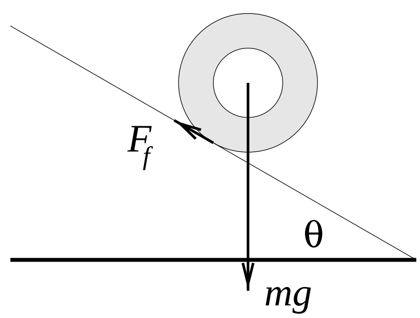
$$W = C\Delta T = mc_{\text{kopper}}\Delta T,$$

så temperaturøkningen blir

$$\Delta T = \frac{W}{mc_{\text{kopper}}} = \frac{sg\mu_K \cos\theta}{c_{\text{kopper}}} = 0.108\,919 \text{ K}. \tag{11}$$

Hvis massen istedet hadde veide 100 kg ville friksjonsarbeidet blitt 10 ganger større. Men siden varmekapasitetet også ville blitt 10 ganger større blir temperaturøkningen den samme.

e) Røret legges nå horisontalt på skråplanet, der det antas å rulle uten å skli.



Når røret ruller med hastighet v har det en vinkelhastighet

$$\omega = \frac{v}{R}$$

om sylinderaksen. Da blir dreieimpulsen

$$L = I\omega = I\frac{v}{R} = \frac{5}{8}\, mRv. \tag{12}$$

Hva er rørets rotasjonsenergi K_r og dets totale kinetiske energi K i samme situasjon?

Rørets rotasjonsenergi blir

$$K_r = \frac{1}{2}\, I\omega^2 = \frac{1}{2}\, I\frac{v^2}{R^2} = \frac{5}{16} mv^2, \tag{13}$$

og den totale kinetiske energien blir

$$K = \frac{1}{2}mv^2 + K_r = \frac{13}{16}\, mv^2. \tag{14}$$

f) Bruk energibevaring til å sette opp en sammenheng mellom rørets (massesenter) hastighet v og den avstanden s det har rullet nedover skråplanet (fra ro). Gi her, og i det følgende, svaret symbolsk for en generell verdi av helningsvinkelen θ.

Når røret har rullet en strekning s er reduksjonen i potensiell energi

$$\Delta U = mgh = mgs\sin\theta,$$

som har blitt konvertert til kinetisk energi, $K = \Delta U$. Dvs.

$$\frac{13}{16}mv^2 = mgs\sin\theta. \tag{15}$$

Finn, ved å tidsderivere denne sammenhengen (eller på annen måte), akselerasjonen til røret.

Vi tidsderiverer (15) og bruker at $ds/dt = v$, $dv/dt = a$. Dette gir

$$\frac{13}{8}mva = mgv\sin\theta,$$

som kan løses med hensyn på akselerasjonen

$$a = \frac{8}{13}g\sin\theta. \tag{16}$$

g) Når helningsvinkelen på skråplanet overstiger en verdi θ_2 vil røret skli raskere enn det ruller ned skråplanet. Bestem denne vinkelen.

Røret vil skli like fort som det ruller når $a_1 = a$, dvs. når

$$g\left(\sin\theta - \mu_K\cos\theta\right) = \frac{8}{13}g\sin\theta, \tag{17}$$

dvs. for en vinkel θ_2 slik at $\frac{5}{13}\tan\theta_2 = \mu_K$,

$$\theta_2 = \arctan(\frac{13\mu_K}{5}) = \arctan(\frac{13}{20}) = 0.576\,375 = 33.024^\circ. \tag{18}$$

Etter vår antagelse om at røret ruller uten å skli vil det altså skli raskere (på høykant) enn det vil rulle når $\theta \geq \theta_2$. Dette lyder paradoksalt, for hvordan kan rørets akselerasjon bli redusert med *mere* enn friksjonskraften? Dette spørsmålet blir analysert i de to neste punktene.

h) Rørets spinn L om sylinderaksen vil øke med tiden, fordi hastigheten øker. Bestem det kraftmomentet M om sylinderaksen som må til for denne økningen.

Kraftmomentet på røret må være

$$M = \frac{d}{dt}L = \frac{d}{dt}\frac{5}{8}mRv = \frac{5}{8}mRa = \frac{5}{13}mRg\sin\theta. \tag{19}$$

Tyngdekraften gir ikke opphav til noe netto kraftmoment om sylinderaksen, så hele bidraget skyldes friksjonskraften fra underlaget (som har retning langs skråplanet). Bestem størrelsen på denne kraften.

På den andre siden må

$$M = F_f\,R,$$

der F_f er den statiske friksjonskraften. Dvs.

$$F_f = \frac{M}{R} = \frac{5}{8}ma = \frac{5}{13}mg\sin\theta. \tag{20}$$

i) Når helningsvinkelen på skråplanet overstiger en verdi θ_3 vil ikke røret lenger kunne rulle uten å skli. Bestem denne vinkelen. Du kan fortsatt anta at $\mu_S = \mu_K = 0.25$.

Den statiske friksjonskraften kan ikke overstige $\mu_S N = \mu_S mg\cos\theta$, dvs at vi må ha

$$\frac{5}{13}\,mg\sin\theta \leq \mu_S mg\cos\theta,$$

så røret kan bare rulle uten å skli sålenge $\frac{5}{13}\tan\theta \leq \mu_S$, dvs. for $\theta \leq \theta_3$, der

$$\theta_3 = \arctan(\frac{13\mu_S}{5}) = \arctan(\frac{13}{20}) = 0.576\,375 = 33.024° = \theta_2. \tag{21}$$

Antagelsen om at røret ruller uten å skli holder altså ikke for de vinklene vi fant skulle føre til at det sklir fortere enn det ruller. Dette oppløser paradokset.

Oppgave 2:

På grunn av radioaktive prosesser i jordas indre skjer der en energiproduksjon på ca. 30 TW. Denne energien ledes ut til jordas overflate i form av varme. Jorda kan regnes å være kulesymmetrisk, med omkrets 40 000 km.

a) Varmeledningsevnen til jordskorpa kan settes til $\lambda = 3$ W/m K.

Anslå temperaturgradienten dT/dh i jordskorpa (nær overflaten).

Jordas overflate A er relatert til dens omkrets O ved

$$A = 4\pi\left(\frac{O}{2\pi}\right)^2 = \frac{O^2}{\pi}.$$

Den produserte effekten P som ledes ut fra jorda fører til en varmefluks

$$j_Q = \frac{P}{A} = \frac{\pi P}{O^2} = 0.058\,905\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$$

ved overflaten. På den andre siden har vi en sammenheng mellom varmefluks og temperaturgradient,

$$j_Q = \lambda\frac{dT}{dh}.$$

Temperaturgradienten blir derfor

$$\frac{dT}{dh} = \frac{\pi P}{\lambda O^2} = 0.019\,635\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{m}} \approx 20\,\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{km}}. \tag{22}$$

b) Energien over vil tilslutt forsvinne ut i verdensrommet i form av infrarød stråling. Anta at jorda var så langt borte fra sola at vi kunne se bort fra all innstråling derfra.

Hva ville overflatetemperaturen på jorda blitt dersom (i) den i strålingsforstand kunne betraktes som et sort legeme, eller (ii) som et legeme med emisjonskoeffisient $\varepsilon = 0.1$?

Oppgitt: Stefan-Boltzmanns konstant $\sigma = 5.670\,51 \times 10^{-8}$ W m^{-2}K^{-4}.

Ved bruk av Stefan-Boltzmanns strålingslov

$$j_Q = \varepsilon\sigma T^4$$

finner vi overflatetemperaturen til

$$T = \left(\frac{j_Q}{\varepsilon\sigma}\right)^{1/4} = \begin{cases} 31.926\,\mathrm{K} & \text{når } \varepsilon = 1 \text{ (sort legeme stråling)},\\ 56.774\,\mathrm{K} & \text{når } \varepsilon = 0.1. \end{cases} \tag{23}$$

c) Nå er jorda heldigvis bare i avstand 150 millioner km fra sola, og på en god sommerdag kan vi i Trondheim ha en innstråling av solenergi på opptil 1 kW/m^2. Anta at vi har en meget effektiv solfanger, der all denne energien brukes til å varme opp vann fra 20 °C til 80 °C. Vann har spesifikk varmekapasitet $c_{\text{vann}} =$ 4 180 J/kg K. Massetettheten til vann er 1 000 kg/m^3.

Hvor stort volum vann kan vi varme opp pr. kvadratmeter og sekund i solfangeren?

For å varme opp et volum V med vann fra 20 °C til 80 °C trengs det

$$Q = 60 \times 4\,180 \times 1\,000 \times \frac{V}{\mathrm{m}^3}\ \mathrm{J} = 250\,800\,000 \times \frac{V}{\mathrm{m}^3}\ \mathrm{J}.$$

En energifluks $j_Q = 1\,000\ W/m^2$ vil derfor varme opp

$$V_j = \frac{j_Q}{Q} = \frac{1\,000}{250\,800\,000}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}} = 0.000\,003\,987\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{24}$$

d) Oppvarmingen skjer ved at et tynt skikt (tykkelse $d = 1$ mm) med vann strømmer langsomt ($v = 0.2$ m/s) gjennom solfangeren. Hvor *lang* må solfangeren være for at vi skal få den ønskede oppvarmingen?

En helt akseptabel løsning på denne oppgaven er å bruke dimensjonsanalyse og sunn fornuft: (i) Jo større hastigheten v er, dess lengere rekker vannet å strømme mens det varmes opp, så lengden ℓ til solfangeren må være proporsjonal med v, (ii) jo større V_j er, dess kortere tid tar det å varme opp vannet, så ℓ må være proporsjonal med V_j^{-1}, og (iii) jo tykkere vannskiktet er dess lengre tid tar det å varme opp vannet (fordi det er mere vann å varme opp), så ℓ må være proporsjonal med d. Altså,

$$\ell = \frac{vd}{V_j} = \frac{0.2\ \mathrm{m/s} \times 0.001\ \mathrm{m}}{0.000\,003\,987\ \mathrm{m/s}} = 50.160\ \mathrm{m}. \tag{25}$$

Som en kontroll registerer vi at svaret er dimensjonsmessing korrekt. For en mer direkte analyse kan vi se på et lite volum vann av dybde (tykkelse) d, bredde b og lengde $d\ell$ (dvs. overflateareal $b \times d\ell$). Dette volumet vil absorbere en effekt på

$$dP = 1\,000 \times 1\,000 \times b \times d\ell\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^2\mathrm{s}},$$

og trenger en varmemengde på

$$dQ = 60 \times 4\,180 \times 1\,000 \times d \times b \times d\ell\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$$

til oppvarmingen, som derfor tar en tid

$$\tau = \frac{dQ}{dP} = \frac{60 \times 4\,180 \times 1\,000 \times d}{1\,000}\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}}.$$

Siden vannet strømmer med en hastighet v må solfangeren ha en lengde

$$\ell = v\tau = 60 \times 4.180 \times 1\,000\,vd\,\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}} = 50.160\ \mathrm{m}, \tag{26}$$

for at vannet skal rekke å varmes opp mens det strømmer gjennom den.

Oppgave 3:

Du kommer tilbake fra juleferie til en iskald hybel, $T = 0$ °C. Anta at hybelen har et volum på 40 m^3, og at lufta kan regnes som en ideell toatomig gass, med trykk $p = 1$ atm når $T = 0$ °C.

a) Hvor mye energi trengs det for å varme opp lufta til 20 °C, dersom hybelen kan regnes som potte tett (slik at oppvarmingen kan regnes å skje under konstant volum)? Hvor mye øker trykket med?

Oppgitt: 1 atm = 101 325 N/m^2. 0 °C = 273 K.

Det var forutsatt at man skulle huske at spesifikk varmekapasitet for toatomige molekyler er $c_V = \frac{5}{2}$ k pr. molekyl i det aktuelle temperaturområdet (eller ekvivalente versjoner av dette). Ved konstant volum trengs det en varmemengde

$$\Delta Q = \Delta U = C_V\,\Delta T = Nc_v\Delta T = \frac{5}{2}Nk\Delta T,$$

for å varme opp lufta med ΔT. For å finne et uttrykk for N bruker vi ideell gasslov,

$$pV = NkT, \quad \text{dvs.} \quad Nk = \frac{p_0 V}{T_0},$$

der p_0 er det oppgitte trykket ved temperaturen $T_0 = 273$ K. Altså finner vi at

$$\Delta Q = \frac{5}{2}p_0 V\,\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{5}{2} \times 101\,325 \times 40 \times \frac{20}{273}\ \text{J} \approx 742\,307\ \text{J} \approx 0.21\ \text{kWh}. \tag{27}$$

Fra den ideelle gassloven følger det at

$$p = p_0\frac{T}{T_0}$$

Dvs. at trykkøkningen

$$\Delta p = p - p_0 = p_0\,\frac{\Delta T}{T_0} = 101\,325 \times \frac{20}{273}\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 7423\ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \approx 0.073\ \text{atm}. \tag{28}$$

b) Det er mer realistisk å anta at oppvarmingen skjer under konstant trykk. Gi et estimat på hvor mye energi som kreves til oppvarmingen i den situasjonen.

Spesifikk varmekapasitet under konstant trykk er $c_p = c_V + k$, dvs. $c_p = \frac{7}{2}k$ pr. molekyl for en toatomig gass. Som et *estimat* kan vi derfor sette

$$\Delta Q = \frac{7}{2}p_0 V\,\frac{\Delta T}{T_0} = \frac{7}{2} \times 101\,325 \times 40 \times \frac{20}{273}\ \text{J} \approx 1\,039\,231\ \text{J} \approx 0.29\ \text{kWh}. \tag{29}$$

Da har vi ikke tatt hensyn til at lufta vil utvide seg ettersom den varmes opp, og den lufta som presses ut av rommet trenger vi jo ikke å varme opp videre. Siden $pV = NkT$ er konstant vil antallet molekyler i rommet ved temperaturen T være lik

$$N(T) = N(T_0)\frac{T_0}{T}.$$

Oppvarming av lufta fra temperaturen T til $T + dT$ krever derfor en varmemengde

$$dQ = \frac{7}{2}\,kN(T)\,dT = \frac{7}{2}\,kN(T_0)T_0\,\frac{dT}{T} = \frac{7}{2}\,p_0 V\,\frac{dT}{T}.$$

Den nøyaktige varmemengden som trengs til oppvarmingen er derfor

$$\Delta Q = \frac{7}{2}\,p_0 V\int_{T_0}^{T_0+\Delta T}\frac{dT}{T} = \frac{7}{2}\,p_0 V\,\log\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\right) \approx 1\,002\,926\ \text{J} \approx 0.28\ \text{kWh}. \tag{30}$$