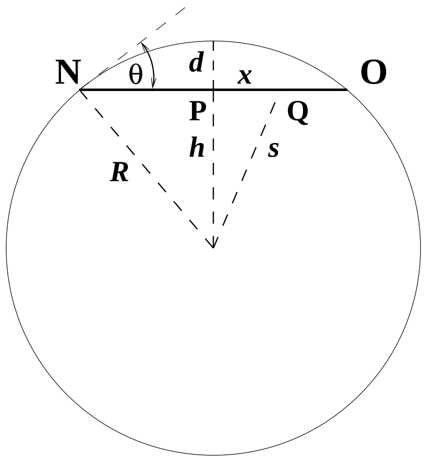
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Eksamen gitt av Kåre Olaussen

Løsningsforslag til
Eksamen i fag SIF4004 FYSIKK FOR ELEKTROTEKNIKK OG TELEKOMMUNIKASJON
Tirsdag 24. november 1998
Tid:

Oppgave 1:



Styret i A/S Gardermobanen har besluttet å gi opp arbeidet med Romeriksporten, og istedet grave en tunnel fra Oslo (**O**) til New York (**N**) — som skissert på figuren over. Denne forventes å ta unna så mye trafikk at hovedflyplassen kan flyttes tilbake til Fornebu. Det er også liten fare for at vannpyttene over *denne* tunnelen blir tørrlagt pga lekkasje.

a) Oslo ligger på (60° N, 11° Ø), som i kulekoordinater svarer til

$$(\vartheta_O, \varphi_O) = ((90-60)\pi/180, 11\pi/180). \tag{1}$$

New York ligger på 41° N, 74° V, som i kulekoordinater svarer til

$$(\vartheta_N, \varphi_N) = ((90-41)\pi/180, -74\pi/180) \tag{2}$$

Med jorda radius $R = 6\,366$ km blir

$$\begin{aligned}\vec{r}_O &\equiv R\,\hat{e}_O = R\,(\sin\vartheta_O\cos\varphi_O\,\hat{e}_x + \sin\vartheta_O\sin\varphi_O\,\hat{e}_y + \cos\vartheta_O\,\hat{e}_z)\,,\\ \vec{r}_N &\equiv R\,\hat{e}_N = R\,(\sin\vartheta_N\cos\varphi_N\,\hat{e}_x + \sin\vartheta_N\sin\varphi_N\,\hat{e}_y + \cos\vartheta_N\,\hat{e}_z)\,.\end{aligned} \tag{3}$$

b) Avstanden D gjennom tunnelen fra Oslo til New York er

$$\begin{aligned} D &= |\vec{r}_O - \vec{r}_N| = R\,|\hat{e}_O - \hat{e}_N| = R\sqrt{1 - 2\hat{e}_O \cdot \hat{e}_N + 1} \\ &= R\,[\,2 - 2\sin\vartheta_O \sin\vartheta_N \cos(\varphi_O - \varphi_N) - 2\cos\vartheta_O \cos\vartheta_N\,]^{1/2} \quad (4) \\ &= 6\,366 \text{ km} \times 0.893\,249\,772 = 5\,686 \text{ km} \quad (5) \end{aligned}$$

Vi har brukt addisjonsteoremet

$$\cos\varphi_O \cos\varphi_N + \sin\varphi_O \sin\varphi_N = \cos(\varphi_O - \varphi_N)\,.$$

c) Fra figuren ser vi at innslagsvinkelen θ oppfyller ligningen $\sin\theta = D/2R$. Dette gir

$$\theta = \arcsin\left(\frac{D}{2R}\right) = \arcsin\left(\frac{5\,686}{12\,732}\right) = 0.462\,989\,52 = 26.527\,345\,44\,^\circ. \quad (6)$$

Videre er

$$\begin{aligned} h &= R\cos\theta = 6\,366 \text{ km} \times 0.894\,721\,304 = 5\,696 \text{ km}, \\ d &= R - h = 670 \text{ km}. \quad (7) \end{aligned}$$

d) For enkelhets skyld regner vi alle gravitasjonskreftene slik de vil virke på en masse $m = 1$ (slik at det egentlig er akselerasjoner vi regner ut). Andelen av jordmasse innenfor radius s er (når man antar at jordas massetetthet er konstant),

$$M(s) = \frac{s^3}{R^3} M(R), \quad (8)$$

der $M(R)$ er jordas totale masse. Gravitasjonskraften $g(s)$ er like stor som om hele $M(s)$ hadde vært plassert i jordas sentrum,

$$g(s) = \frac{M(s)G}{s^2} = \frac{R^2}{s^2}\frac{s^3}{R^3}\frac{M(R)G}{R^2} = \frac{s}{R} g(R), \quad (9)$$

der $g(R) = 9.81 \text{ m/s}^2$ er gravitasjonskraften ved jordas overflate. Denne kraften er rettet mot jordas sentrum.

e) Den komponenten F_P av gravitasjonskraften som peker langs tunnelen har størrelse

$$F_P = \frac{x}{s} g(s) = \frac{g(R)}{R} x. \quad (10)$$

f) Bevegelsesligningen for et tog som slippes gjennom tunnelen blir

$$\ddot{x} + \frac{g(R)}{R} x = 0. \quad (11)$$

g) Den generelle løsningen til (11) er

$$x(t) = \frac{D}{2} \sin(\bar{\omega}(t - t_0))\,, \quad (12)$$

der $\bar{\omega}^2 = g(R)/R$. Toget vil derfor pendle fra New York til Oslo i løpet av en tid

$$\tau = \frac{\pi}{\bar{\omega}} = \pi\sqrt{\frac{R}{g(R)}} = 2\,531 \text{ s} = 42 \text{ minutter } \ 11 \text{ sekunder}. \quad (13)$$

h) Når vi faller fra overflaten til avstand h fra jordas sentrum blir den potensielle energien redusert med (pr. masseenhet)

$$\Delta U/m = \int_h^R g(s')\,ds' = \frac{g(R)}{R}\int_h^R s'\,ds' = \frac{g(R)}{2R}\left(R^2 - h^2\right) = g(R)d\left(1 - \frac{d}{2R}\right). \tag{14}$$

(I siste overgang har vi brukt at $h = R - d$.) Den potensielle energien har blitt konvertert til kinetisk energi,

$$\frac{1}{2}v^2 = \Delta U/m.$$

dvs.

$$v = \sqrt{2g(R)d\left(1 - \frac{d}{2R}\right)} = 3\,529\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{15}$$

i) Posisjonen til toget kan skrives som

$$\vec{r}(t) = (1 - \sin\bar{\omega}t)\,\vec{r}_N + \sin\bar{\omega}t\,\vec{r}_O. \tag{16}$$

j) Vinkelhastigheten til jorda om sin egen akse er

$$\vec{\omega} = \omega\,\hat{e}_z, \tag{17}$$

der $\omega = 2\pi/\tau_d$, med $\tau_d \approx 1$ dag $= 86\,400$ s (mer nøyaktig tar en omdreining 86 164 sekunder). Vi finner en sentrifugalkraft pr. masseenhet

$$\vec{F}_s/m = \omega^2\,\vec{r}_\perp(t) = \omega^2\,\left[\,(1 - \sin\bar{\omega}t)\,\vec{r}_{\perp N} + \sin\bar{\omega}t\,\vec{r}_{\perp O}\,\right], \tag{18}$$

der indeksen $\perp$ betyr at de forskjellige vektorene skal projiseres ned i xy-planet. Denne kraften utfører et arbeid pr. tids- og masseenhet (dvs. effekt P pr. masseenhet) lik

$$P/m = \vec{F}_s \cdot \vec{v}/m = \omega^2\,\vec{r}_\perp(t)\cdot\frac{d}{dt}\vec{r}_\perp(t) = \frac{d}{dt}\,\frac{1}{2}\,\omega^2\,r_\perp^2(t). \tag{19}$$

Vi finner også en Corioliskraft pr. masseenhet

$$\vec{F}_C/m = \omega\,\bar{\omega}\,\cos\bar{\omega}t\;\hat{e}_z \times (\vec{r}_{\perp N} - \vec{r}_{\perp O}) \tag{20}$$

Siden Corioliskraften virker normalt på hastigheten vil den ikke utføre noe arbeid.

k) Corioliskraften er uten betydning. Sentrifugalkraften vil virke bremsende sålenge toget nærmer seg rotasjonsaksen til jorda, og akselererende når det fjerner seg igjen. New York ligger lenger fra jordas rotasjonsakse enn Oslo. Når toget skal pendle fra New York til Oslo får vi mere nedbremsing enn akselerasjon, så det vil aldri rekke helt fram. Når toget pendler fra Oslo til New York er det motsatt, så det vil komme farende ut på Manhattan med en hastighet

$$v = \omega\sqrt{r_{\perp N}^2 - r_{\perp O}^2} = \omega\,R\,\sqrt{\sin^2\vartheta_N - \sin^2\vartheta_O} = 262\ \mathrm{m/s}. \tag{21}$$

l) Vi har friksjon mot jernbaneskinnene. Den avhenger ikke av hastighetens størrelse, bare av dens retning. Fordi hjulet ruller vil den (ideellt sett) ikke utføre noe arbeid, og er derfor helt uten betydning i dette tilfellet. Den viktige friksjonen er forårsaket av luftmotstand, som øker som kvadratet av hastigheten. (Derfor er det nok best å pumpe tunnelen helt tom for luft. Da får tunnelselskapet et annet tetningsproblem…)

Oppgave 2:

a) Punktet **P** befinner seg i en dybde $d = 670$ km, så ifølge modellen vår blir temperaturen $670 \times 20 + 293$ K $= 13\,693$ K. (Det er neppe tilrådelig å grave så dypt — bortsett fra det praktiske problemet med å finne gravemaskiner til formålet). I avstand x fra **P** er dybden

$$d(x) = R - s(x) = R - \sqrt{h^2 + x^2} \approx d - \frac{x^2}{2h} \tag{22}$$

og temperaturen blir derved

$$T(x) = 293\,\mathrm{K} + 20\,\mathrm{K/km} \times d(x) \tag{23}$$

b) Posisjonen til toget vil være

$$x(t) = x_{max}\, \sin(\bar{\omega}(t - t_0)) \approx \sqrt{2dh}\, \sin(\bar{\omega}(t - t_0)) \tag{24}$$

så tidsvariasjonen av temperaturen blir

$$T(t) = 293\ \mathrm{K} + 13\,400\ \mathrm{K} \times \sin^2 \bar{\omega}(t - t0) \tag{25}$$

Midling av $\sin^2 \bar{\omega} t$ over en halvperiode er lik $\frac{1}{2}$, så vi finner

$$\bar{T} = 6\,993\ \mathrm{K}. \tag{26}$$

c) Tilstandsligningen for en ideell gass lyder

$$pV = NkT \tag{27}$$

så vi finner at antallet molekyler N er

$$N = \frac{pV}{kT} = \frac{101\,325 \times 100 \times \pi \times 5^2}{1.380\,558 \times 10^{-23} \times 293.16} = 0.196\,629 \times 10^{30}. \tag{28}$$

d) De oppgitte prosentene var vektprosent, ikke relative antall f, så vi må gjøre en omregning. Vi har sammenhengen

$$\frac{28\, N_{N_2}}{28\, N_{N_2} + 32\, N_{O_2}} = \frac{28\, f_{N_2}\, N}{28\, f_{N_2}\, N + 32\,(1 - f_{N_2})\, N} = 0.79, \tag{29}$$

som løst gir $f_{N_2} = (0.79 \times 32)/(28 + 0.79 \times 4) = 0.811\,30$, og $f_{O_2} = 1 - f_{N_2} = 0.188\,70$. Altså

$$N_{N_2} = f_{N_2}\, N = 0.159\,524 \times 10^{30}, \qquad N_{O_2} = f_{O_2}\, N = 0.371\,045 \times 10^{30}. \tag{30}$$

e) Maxwell's hastighetsfordeling har formen

$$P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} v^2\, \mathrm{e}^{-(mv^2/2kT)}. \tag{31}$$

Dette betyr at sannsynligheten S for at et molekyl skal ha større hastighet enn v_0 er

$$\begin{aligned} S &= \int_{v_0}^{\infty} dv\, P(v) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{v_0}^{\infty} dv\, v^2\, \mathrm{e}^{-(mv^2/2kT)} \\ &= 4\pi\, (2\pi)^{-3/2} \int_{u_0}^{\infty} dx\, x^2\, \mathrm{e}^{-x^2/2}, \end{aligned} \tag{32}$$

der $u_0 = \sqrt{m/kT} v_0$. Massen til et N_2-molekyl er $28\ m_u = 28 \times 1.666\,540\,2 \times 10^{-27}$ kg, så hastigheter på henholdsvis $v_0 = 1\,000$ m/s, $v_0 = 3\,000$ m/s, og $v_0 = 10\,000$ m/s svarer til $u_0 = 3.396$, $u_0 = 10.19$, og $u_0 = 33.96$ ved $T = 293$ K. Integralene må gjøres numerisk, eller evalueres med andre tilnærmingsmetoder. De blir henholdsvis lik 0.009 168, $0.232\,549 \times 10^{-21}$, og $0.100\,315 \times 10^{-248}$ i de tre tilfellene. Dette impliserer at det søkte antallet N_2-molekyler er henholdsvis

$$\begin{aligned} N_{N_2}(v > 1\,000\ \mathrm{m/s}) &= 1.803 \times 10^{27}, \\ N_{N_2}(v > 3\,000\ \mathrm{m/s}) &= 45.726 \times 10^{6}, \\ N_{N_2}(v > 10\,000\ \mathrm{m/s}) &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

f) Siden luften består av toatomige molekyler kan spesifikk varme settes til $\frac{5}{3}k$ pr. molekyl. Den varmemengden Q som skal til for å varme opp toget med 1 K blir derfor

$$Q = \frac{5}{2} N k \times 1\,\mathrm{K} = 6.786\,436\ \mathrm{MJ}. \tag{34}$$

g) Varmestrømmen inn i toget blir (ved en innetemperatur på 20 °C)

$$I_Q = \frac{\lambda A}{a}\,(T - 293\ \mathrm{K}), \tag{35}$$

der T er temperaturen utenfor, A er togets overflate, a er tykkelsen på veggene, og λ er den termiske ledningsevnen til veggene.

h) Total tilført varmemengde i løpet av en reise blir

$$Q = \frac{\lambda A}{a} \int_0^{\tau} dt\ \left[T(t) - 293\ \mathrm{K}\right] = \frac{\lambda A \tau}{a}\ \left(\bar{T} - 293\ \mathrm{K}\right). \tag{36}$$

i) Vi løser ligning (36) med hensyn på a,

$$a = \frac{\lambda A \tau}{Q}\ \left(\bar{T} - 293\ \mathrm{K}\right) = \frac{0.05 \times 100 \times 2\pi \times 5 \times 2\,531}{6\,786\,436} \times 6\,700 = 392.5\ \mathrm{m} \tag{37}$$

A/S Gardermobanen har tydeligvis et betydelig isolasjonsproblem — men det er neppe det største problemet med dette prosjektet!

j) Varmestrømmen ut fra jorda indre er

$$j_Q = 3\ \mathrm{W/m\,K} \times 0.02\ \mathrm{K/m} = 0.06\ \mathrm{W/m^2}. \tag{38}$$

Jordas overflate er ca. $4\pi \times 6\,366\,000^2\ \mathrm{m}^2$, så den totale energiproduksjonen i jordas indre må være

$$P = 30.5\ \mathrm{TW}. \tag{39}$$