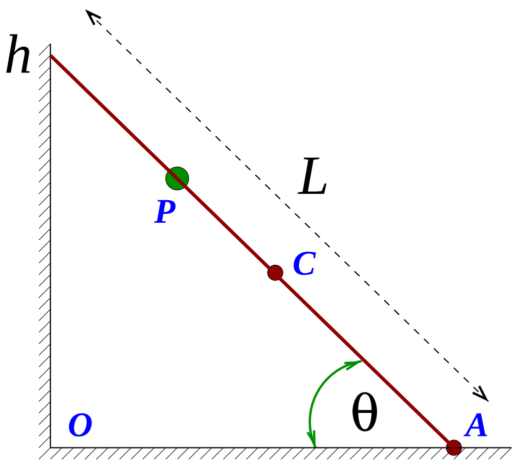
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Eksamen gitt av Kåre Olaussen

**Løsningsforslag til**
**Eksamen i fag SIF4004 FYSIKK for**
**ELEKTROTEKNIKK OG TELEKOMMUNIKASJON**
Onsdag 1. desember 1999
Tid: 09:00—15:00

Dette foreløbige løsningsforslaget (skrevet før eksamen er rettet) er på 11 sider. Det framgikk under eksamen at endel av spørsmålene var uheldig/tvetydig formulert; dette er i noen grad endret i spørsmålsdelene av teksten. Dette er ikke for å omskrive historien (det originale oppgavesettet er også utlagt), men med tanke på at oppgavene kan bli brukt i undervisningssammenheng senere.

## Oppgave 1:




En kommunepolitiker $P$ som planla å innta ordførerkontoret på valgnatten hadde utstyrt seg med en stige av lengde $L$, som antydet på figuren til høyre. For bedre stabilitet var stigen tyngst nederst, med massetetthet pr. lengdeenhet lik

$$\rho(\ell) = \rho_0 + \rho_1(L - \ell), \tag{1}$$

der $\ell$ er avstanden fra endepunktet $A$ av stigen. Du kan her se bort fra $P$ i alle delspørsmål unntatt **e**.

**Kommentar:** Her burde massetettheten heller vært definert som

$$\rho(\ell) = \rho_0 + \left(1 - \frac{\ell}{L}\right)\rho_1, \tag{2}$$

med $\rho_1 = 6$ kg/m som eksplisitt tallverdi senere. Det skapte endel unødvendig usikkerhet at $\rho_0$ og $\rho_1$ hadde ulik dimensjon.

**a)** Finn, på symbolsk form, (i) stigens totale masse $M$, og (ii) avstanden $R$ til massemiddelpunktet (tyngdepunktet) $C$ for stigen, målt fra endepunktet $A$.

**Kommentar:** Den vedlagte formelsamlingen bør utvides med en formel for massemiddelpunktet.

Stigens totale masse er

$$M = \int_0^L \rho(\ell)\, d\ell = \int_0^L [\rho_0 + \rho_1(L-\ell)]\, d\ell = \rho_0 L + \frac{1}{2}\rho_1 L^2. \tag{3}$$

Det er ikke nødvendig, men hvis man innfører den dimensjonsløse parameteren

$$\delta \equiv \rho_1 L/\rho_0 \tag{4}$$

(som er et mål på hvor skjev massefordelingen på stigen er), så kan man skrive

$$M = (1+\delta/2)\, \rho_0 L. \tag{5}$$

Avstanden $R$ til massemiddelpunktet, målt fra $A$, er gitt ved

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{M}\int_0^L \rho(\ell)\, \ell d\ell = \frac{1}{M}\int_0^L [\rho_0 + \rho_1(L-\ell)]\, \ell d\ell \\ &= \frac{1}{M}\left[\frac{1}{2}\rho_0 L^2 + \frac{1}{2}\rho_1 L^3 - \frac{1}{3}\rho_1 L^3\right] = \frac{1}{M}\left[\frac{1}{2}\rho_0 L^2 + \frac{1}{6}\rho_1 L^3\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Siste likhet i ligning (6) er et fullgodt svar, men uttrykt ved den dimensjonsløse parameteren $\delta$ kan resultatet omskrives på formen

$$R = \left(\frac{1+\delta/3}{1+\delta/2}\right)\frac{L}{2}. \tag{7}$$

**b)** Finn, på symbolsk form, stigens treghetmoment $I_A$ om aksen som går gjennom endepunktet $A$ og står normalt på papirplanet i figuren. Finn også treghetsmomentet $I_C$ om aksen som går gjennom massemiddelpunktet $C$ og står normalt på papirplanet i figuren.

Stigens treghetsmoment $I_A$ om en akse gjennom $A$ er gitt ved

$$\begin{aligned} I_A &= \int_0^L \rho(\ell)\, \ell^2 d\ell = \int_0^L [\rho_0 + \rho_1(L-\ell)]\, \ell^2 d\ell \\ &= \frac{1}{3}\rho_0 L^3 + \frac{1}{3}\rho_1 L^4 - \frac{1}{4}\rho_1 L^4 = \frac{1}{3}\rho_0 L^3 + \frac{1}{12}\rho_1 L^4. \end{aligned} \tag{8}$$

Siste likhet i ligning (8) er et fullgodt svar, men ved å innføre parameteren $\delta$ kan dette omskrives på formen

$$I_A = \left(\frac{1+\delta/4}{1+\delta/2}\right)\frac{ML^2}{3} \tag{9}$$

For å finne stigens treghetsmoment $I_C$ om en akse gjennom massesenteret $C$ er det enklest å bruke parallellakseteoremet, som her sier at

$$I_C = I_A - MR^2. \tag{10}$$

Ligning (10) er et fullgodt svar, men ved å innføre parameteren $\delta$ kan resultatet omskrives på formen

$$\begin{aligned} I_C &= \left(\frac{1+\delta/4}{1+\delta/2}\right)\frac{ML^2}{3} - \left(\frac{1+\delta/3}{1+\delta/2}\right)^2\frac{ML^2}{4} \\ &= \left[\frac{4(1+\delta/4)(1+\delta/2) - 3(1+\delta/2)^2}{(1+\delta/2)^2}\right]\frac{ML^2}{12} \\ &= \left(\frac{1+\delta+\delta^2/6}{1+\delta+\delta^2/4}\right)\frac{ML^2}{12} \end{aligned} \tag{11}$$

Ved å sette $\delta = 0$ i denne formelen reproduserer vi treghetsmomentet $\frac{1}{12}ML^2$ for en tynn homogen stav av lengde $L$ og masse $M$.

**c)** Sett

$$L = 10 \text{ m}, \quad \rho_0 = 2 \text{ kg/m}, \quad \rho_1 = 0.6 \text{ kg/m}^2$$

og finn tallverdiene for $M$, $R$, $I_A$ og $I_C$.

Innsetting av tallverdier gir $\delta = 0.6 \times 10/2 = 3$, og

$$M = 50 \text{ kg} \tag{12}$$
$$R = 4 \text{ m} \tag{13}$$
$$I_A = \frac{7\,000}{6} \text{ kg m}^2 \approx 1\,667 \text{ kg m}^2 \tag{14}$$
$$I_C = \frac{1\,100}{3} \text{ kg m}^2 \approx 367 \text{ kg m}^2. \tag{15}$$

Som en sjekk av dette svaret kan man sammenligne resultatet med treghetsmomentet for en homogen stav, gitt i den vedlagte formelsamlingen

$$I = \frac{1}{12}ML^2 = \frac{50 \times 10^2}{12} \text{ kg m}^2 = 417 \text{ kg m}^2.$$

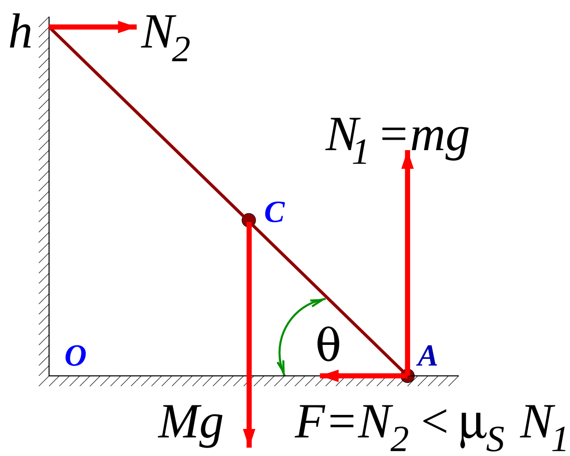
**d)** Rådhusveggen er så hard og glatt at den kan regnes som friksjonsfri, mens den statiske friksjonskoeff-isienten mellom stige og bakkeplan kan regnes å være $\mu_S = 1.0$. Tegn en skisse som viser hvilke krefter som virker på stigen. Prøv å få noenlunde riktige størrelsesforhold mellom kreftene.

Figuren til høyre indikerer kreftene på stigen. For at ikke stigen skal bli akselerert i $y$–retningen må normalkraften $N_1$ fra bakken nøyaktig kansellere tyngdekraften $Mg$,

$$N_1 = Mg. \tag{16}$$

For at stigen ikke skal bli akselerert i $x$–retningen må friksjonskraften $F$ nøyaktig kansellere normalkraften $N_2$ fra veggen,

$$F = N_2. \tag{17}$$




Siden $\mu_S = 1$ må $F \leq Mg$. En fullgod figur bør indikere disse forholdene, men utover dette kreves det ikke at forholdet $F/Mg$ skal indikeres særlig nøyaktig. Dette forholdet kan f. eks. finnes fra betingelsen om at kraftmomentet om punktet $A$ skal være null. Dette gir

$$\frac{F}{Mg} = \frac{N_2}{Mg} = \frac{R}{L}\cot\theta. \tag{18}$$

(For tallverdiene fra punkt **c**, og $\theta$ som på figuren, blir dette forholdet omtrent 0.39 — som angitt på figuren.)

**e)** For å komme inn på ordførerens kontor må stigen reises til en høyde $h = 6$ m oppetter rådhusveggen. Hva er den maksimale vekt (dvs. masse $M_P$) som $P$ kunne tillate seg å ha på valgnatten for å kunne klatre opp stigen uten at den begynner å skli? (Siden $P$ er en meget liten og rund politiker kan denne regnes som punktformet.)

Siden $P$ er en punkt-politiker må h[au]n klatre helt til enden av stigen (dvs. til en avstand $L$ fra startpunktet $A$) for å komme seg inn. Med med en masse $M_P$ blir da betingelsen for at kraftmomentet om $A$ skal forsvinne

$$(RM + LM_P)g\cos\theta = LN_2\sin\theta, \tag{19}$$

dvs. at $F = N_2 = [(R/L)M + M_P]g\cot\theta$. Samtidig gir kraftbalansen i vertikal retning at

$$N_1 = (M + M_P)g, \tag{20}$$

så betingelsen $F \le \mu_S N_1$ gir ulikheten

$$[\,(R/L)M + M_P\,]\cot\theta \le \mu_S\,(M + M_P)\,,$$

eller

$$(\cot\theta - \mu_S)\,M_P \le [\,\mu_S - (R/L)\cot\theta\,]\,M. \tag{21}$$

Hvis $\mu_S \ge \cot\theta$ i ligning (21) så vil venstresiden være null eller negativ. I det tilfellet er ulikheten alltid oppfyllt, og $P$ trenger overhodet ikke å tenke på vekten: H[au]n vil alltid kunne klatre opp stigen uten at den begynner å skli. Hvis $\mu_S \le (R/L)\cot\theta$ i ligning (21) så vil *høyresiden* være null eller negativ, og $P$ trenger overhodet ikke å tenke på vekten da heller: Uansett hvilken (positiv) vekt h[au]n slanker seg til så vil ulikheten ikke kunne oppfylles.

I vårt tilfelle er $\mu_S = 1$ og $\sin\theta = 6/10$, dvs. at $\cos\theta = 8/10$ og $\cot\theta = 4/3$. Siden videre $R/L = 4/10$ får vi ulikheten

$$\left(\frac{4}{3} - 1\right)\,M_P \le \left(1 - \frac{4}{10}\frac{4}{3}\right)\,M$$

eller

$$M_P \le \frac{7}{5}\,M = 70 \text{ kg}, \tag{22}$$

hvilket burde være lett oppnåelig for en liten punktpolitiker.

**Kommentar:** I den opprinnelige oppgaveteksten sto det at man skulle bruke $\mu_S = 0.5$. Dette fører til betingelsen

$$M_P \le -\frac{1}{25}M = -2 \text{ kg}$$

så i dette tilfellet måtte nok $P$ blåse seg skikkelig opp som en ballong.

**f)** På valgnatten reises stigen som planlagt. Hvilken totalenergi $E$ får den (målt i forhold til at den ligger i ro på bakken)? Tyngdens akselerasjon kan settes til $g = 9.81$ m/s$^2$.

Når den 10 m lange stigen reises 6 m oppetter rådhusveggen vil tyngdepunktet løftes med

$$R\sin\theta_s = 4 \times \frac{6}{10}\ \mathrm{m} = 2.4\ \mathrm{m},$$

så da økes den potensielle energien med

$$E = MR\sin\theta_s\, g = 50 \times 2.4 \times 9.81\ \mathrm{J} = 1\,177\ \mathrm{J} \tag{23}$$

Her blir dette også lik totalenergien.

**g)** Dessverre for $P$ hadde det lagt seg mye sleipt løv på bakken i løpet av valgdagen, så kontakten mellom stige og bakkeplan viste seg å være fullstendig friksjonsfri. Stigen begynte derfor øyeblikkelig å skli (mens $P$ løp i sikkerhet uten å påvirke den videre utvikling).

Sett opp bevaringsloven for stigens energi, uttrykt ved vinkelen $\theta$, vinkelhastigheten $\omega = d\theta/dt$, og massesenterets posisjon $\vec{R}_C$ og hastighet $\vec{V}_C$.

Ettersom stigen sklir nedover rådhusveggen vil den få både translasjonsbidrag $E_T = \frac{1}{2}M\,\vec{V}_C^2$, rotasjonsbidrag $E_R = \frac{1}{2}I_C\,\omega^2$, og potensialbidrag $V = MgY_C$ til energien. Uten friksjon må disse bidragene summere til den totalenergien vi fant i forrige punkt. Vi har altså konserveringsloven

$$E = \frac{1}{2}M\,\vec{V}_C^2 + \frac{1}{2}I_C\,\omega^2 + MgY_C = 1\,177\ \mathrm{J}. \tag{24}$$

**h)** Finn massesenterets posisjon $\vec{R}_C$ og hastighet $\vec{V}_C$ uttrykt ved vinkelstørrelsene $\theta$ og $\omega$. Velg et koordinatsystem med origo i hjørnet mellom veggen og bakkeplanet (punktet $O$ i figuren). Bruk resultatet til å finne bevaringsloven for energi uttrykt ved $\theta$ og $\omega$ alene.

Av figurene ser vi at

$$X_C = (L-R)\,\cos\theta, \quad Y_C = R\,\sin\theta. \tag{25}$$

Derivasjon med hensyn på tiden, og bruk av kjerneregelen

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}, \tag{26}$$

gir oss hastighetene

$$\dot{X}_C = -(L-R)\,\sin\theta\,\omega, \quad \dot{Y}_C = R\,\cos\theta\,\omega. \tag{27}$$

Derved kan vi skrive

$$\vec{V}_C^2 = \dot{X}_C^2 + \dot{Y}_C^2 = \left[(L-R)^2\,\sin^2\theta + R^2\,\cos^2\theta\right]\,\omega^2,$$

slik at vi får

$$\frac{1}{2}M\,\vec{V}_C^2 = M\left[\,R^2 + L(L-2R)\,\sin^2\theta\,\right]\,\omega^2 \equiv \frac{1}{2}I_T(\theta)\,\omega^2. \tag{28}$$

Her er den siste overgangen en definisjon; vi kan se på den som definisjonen av et "translasjonsbidrag" til treghetsmomentet. Bevaringsloven for energi kan da skrives

$$E = \frac{1}{2}\left[\,I_C + I_T(\theta)\,\right]\,\omega^2 + MgR\sin\theta = 1\,177\ \mathrm{J}. \tag{29}$$

**i)** Finn bevegelsesligningen for den fallende stigen, dvs. en ligning for vinkelakselerasjonen $\alpha = d^2\theta/dt^2$ uttrykt ved $\theta$ og $\omega$.

Siden $E$ er tidsuavhengig i ligning (29), vil derivasjon med hensyn på $t$ gi null. Dette gir oss en bevegelsesligning, dvs. en ligning der vinkelakselerasjonen $\alpha = \dot\omega = \ddot\theta$ inngår. Vi utfører igjen derivasjonen ved bruk av kjerneregelen (26), og får

$$[\,I_C + I_T(\theta)\,]\,\omega\,\dot\omega + \frac{1}{2}\frac{d}{d\theta}I_T(\theta)\,\omega^3 + MgR\,\cos\theta\,\omega = 0. \tag{30}$$

Her er $\dot\omega = d\omega/dt = d^2\theta/dt^2$ den vinkelakselerasjonen vi søker. Merk videre at vi kan dividere alle leddene i ligning (30) med $\omega$, og tilslutt at vi kan bruke energibevaringen (29) til å eliminere $\omega^2$,

$$\omega^2 = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2(E - MgR\sin\theta)}{I_C + I_T(\theta)}. \tag{31}$$

Dette gir vinkelakselerasjonen eksplisitt:

$$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\left[\frac{MgR\cos\theta}{I_C + I_T(\theta)} + \frac{(dI_T/d\theta)(E - MgR\sin\theta)}{[\,I_C + I_T(\theta)\,]^2}\right]. \tag{32}$$

**j)** Når stigen hadde sklidd ned til en vinkel $\theta_0$ mistet den kontakten med veggen. Bestem denne vinkelen.

**Tips:** Kraften fra veggen på stigen kan ikke bli negativ. Hva er sammenhengen mellom denne kraften og akselerasjonen $\vec a_C$ av massemiddelpunktet?

Føringskraften $N_2$ fra veggen kan ikke bli negativ. Uten friksjon er det bare denne kraften som fører til akselerasjon av massemiddelpunktet i $x$–retningen; vi må ha

$$M\ddot X_C = N_2. \tag{33}$$

Stigen vil derfor miste kontakt med veggen i det øyeblikk $\ddot X_C$ blir null. Fra uttrykket for $\dot X_C$ finner vi — igjen ved bruk av kjerneregelen

$$\ddot X_C = -(L - R)\left(\cos\theta\,\omega^2 + \sin\theta\,\dot\omega\right). \tag{34}$$

Stigen mister altså kontakten med veggen ved en vinkel $\theta = \theta_0$, som tilfredsstiller

$$\alpha = \dot\omega = -\cot\theta_0\,\omega^2. \tag{35}$$

Ligningene (31) og (32) gir oss eksplisitte uttrykk for $\omega^2$ og $\alpha$, så (35) kan skrives

$$\frac{MgR\sin\theta_0}{E - MgR\sin\theta_0} = 2 - \frac{(dI_T/d\theta)\tan\theta_0}{I_C + I_T(\theta_0)}.$$

Hvis vi generelt sier at stigen skled ned fra utgangsvinkelen $\theta_s$, så er $E = MgR\sin\theta_s$ (i denne oppgaven er $\sin\theta_s = 3/5$). Da kan gravitasjonskonstanten elimineres (stiger sklir på samme måte på Jorden, Månen, Mars, … )

$$\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_s - \sin\theta_0} = 2 - \frac{(dI_T/d\theta)\tan\theta_0}{I_C + I_T(\theta_0)}. \tag{36}$$

For et første overslag ignorerer vi det andre leddet på høyresiden. Da blir betingelsen

$$\sin\theta_0 \approx \frac{2}{3}\sin\theta_s \overset{\text{her}}{=} \frac{2}{5}. \tag{37}$$

Dette svarer til en vinkel $\theta_0 \approx 0.412 = 23.6°$.

Fra uttrykkene (11) og (28) ser vi at man kan skrive

$$I_C + I_T(\theta_0) = I_0 + I_1 \sin^2\theta_0, \quad dI_T/d\theta = 2I_1 \sin\theta_0 \cos\theta_0,$$

der $I_0 = I_1$ er konstanter. Vi trenger bare forholdet mellom disse i ligning (36), så vi innfører størrelsen

$$\epsilon = I_1/I_0$$

(og utsetter i det lengste strevet med å regne ut forholdet eksplisitt). Innsatt i ligning (36) får vi

$$\frac{\sin\theta_0}{\sin\theta_s - \sin\theta_0} = 2 - \frac{2\epsilon\sin^2\theta_0}{1+\epsilon\sin^2\theta_0}. \tag{38}$$

Dette kan omskrives (ved å eliminere nevnerne) til en tredjegradsligning for $\sin\theta_0$

$$\left(1 + \frac{\epsilon}{3}\sin^2\theta_0\right)\sin\theta_0 = \frac{2}{3}\sin\theta_s \tag{39}$$

Fra ligning (8), (10) og (28) finner vi at

$$I_0 = I_C + MR^2 = I_A = \left(\frac{1+\delta/4}{1+\delta/2}\right)\frac{ML^2}{3},$$

og

$$I_1 = M(L^2 - 2RL) = \frac{\delta/6}{1+\delta/2}ML^2.$$

Altså har vi

$$\frac{\epsilon}{3} = \frac{\delta/6}{1+\delta/2} \overset{\text{her}}{=} \frac{2}{7}. \tag{40}$$

Løsning av tredjegradsligningen

$$\left(1 + \frac{2}{7}\sin^2\theta_0\right)\sin\theta_0 = \frac{2}{5} \tag{41}$$

kan gjøres numerisk. Vi finner

$$\sin\theta_0 = 0.383\,841\,939, \quad \text{dvs. } \theta_0 = 0.393\,953\,367 = 22.572\,°, \tag{42}$$

som jo ikke avviker særlig mye fra det første overslaget.

**Kommentar:** Som kjent kan tredjegradsligninger løses algebraisk. For dette omskriver vi (41) på formen

$$\sin^3\theta_0 + \frac{7}{2}\sin\theta_0 - \frac{7}{5} = 0,$$

og gjør substitusjonen

$$\sin\theta_0 = x - \frac{7}{6x} \tag{43}$$

Dette fører til en annengradsligning for $x^3$,

$$x^6 - \frac{7}{5}x^3 - \left(\frac{7}{6}\right)^3 = 0, \tag{44}$$

med (relevant) løsning

$$x^3 = \frac{7\sqrt{1374}+126}{180}. \tag{45}$$

Innsatt i (43) gir dette

$$\sin\theta_0 = \left(\frac{7\sqrt{1374}+126}{180}\right)^{\frac{1}{3}} - \left(\frac{7\sqrt{1374}-126}{180}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{46}$$

Gjett om jeg blir skuffet dersom ikke alle kom fram til dette resultatet!

## Oppgave 2:

**a)** Vi lar $N$ molekyler av en ideell enatomig gass ved temperaturen $T_1$ ekspandere isotermt fra volumet $V_1$ til volumet $V_2 > V_1$. Finn, på symbolsk form, (i) hvilket arbeid $W_T$ som gassen utfører, og (ii) hvilken varmemengde $Q$ som må tilføres gassen.

Det utførte arbeidet blir

$$W_T = \int_{V_1}^{V_2} p(V)dV = Nk_BT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = Nk_BT_1 \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{47}$$

Siden gassen er ideell er den indre energien kun avhengig av tempereraturen, som her er konstant. Fra første hovedsetning, som her kan skrives

$$Q = \Delta U + W_T, \tag{48}$$

følger det derfor at tilført varme må være lik utført arbeid

$$Q = W_T = Nk_BT_1 \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{49}$$

**b)** Hva er entropiendringen $\Delta S$ for gassen i prosessen over?

Siden temperaturen er konstant blir entropiendringen lik

$$\Delta S = \frac{Q}{T_1} = Nk_B \log\left(\frac{V_2}{V_1}\right). \tag{50}$$

Entropien til gassen *øker* når dem utvider seg ved konstant temperatur.

**c)** Hvis ekspansjonen istedet skjer adiabatisk fra $V_1$ til $V_2$: Finn, på symbolsk form, (i) hvilket arbeid $W_a$ som gassen utfører, og (ii) hvilken sluttemperatur $T_2$ gassen får.

Ligningen for adiabatisk ekspansjon lyder

$$pV^\gamma = p_1V_1^\gamma, \tag{51}$$

der $\gamma = C_p/C_V$ er adiabatkonstanten; i denne oppgaven er $\gamma = 5/3$. Løst for trykket finner vi altså $p(V) = p_1(V_1/V)^\gamma$. Da blir arbeidet

$$\begin{aligned} W_a &= p_1 \int_{V_1}^{V_2} \left(\frac{V_1}{V}\right)^\gamma dV = \frac{p_1}{1-\gamma}\left[\,(V_1/V_2)^\gamma V_2 - V_1\,\right] \\ &= \frac{Nk_BT_1}{\gamma-1}\left[1-(V_1/V_2)^{\gamma-1}\right] \overset{\text{her}}{=} \frac{3}{2}Nk_BT_1\left[1-(V_1/V_2)^{2/3}\right] \end{aligned} \tag{52}$$

I siste overgang er tilstandsligningen $p_1V_1 = Nk_BT_1$ brukt til å eliminere $p_1$.

Hvis vi bruker tilstandsligningen på (51) til å eliminere $p$ til fordel for $T$ finner vi at

$$T\,V^{\gamma-1} = T_1\,V_1^{\gamma-1}.$$

Fra denne finner vi lett slutt-temperaturen

$$T_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} T_1 \overset{\text{her}}{=} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}} T_1 \tag{53}$$

**d)** To gassflasker er koblet sammen med et rør. På dette er det montert en stoppventil. Den ene flaska inneholder 0.025 $m^3$ argongass ($Ar$) ved trykket $p_{Ar} = 7.35\cdot 10^4$ Pa. Den andre flaska innholder 0.045 $m^3$ heliumgass ($He$) ved trykket $p_{He} = 1.46\cdot 10^4$ Pa. Temperaturen er $T = 300$ K.

Hvor mange argon- og helium-atomer er det i de to flaskene?

Fra ideell gass ligningen $pV = Nk_BT$ finner vi antall $Ar$-atomer til å være

$$N_{Ar} = \frac{p_{Ar}V_{Ar}}{k_BT} = \frac{7.35\cdot 10^4 \times 0.025}{1.381\cdot 10^{-23}\times 300} = 4.435\cdot 10^{23}, \tag{54}$$

$$N_{He} = \frac{p_{He}V_{He}}{k_BT} = \frac{1.46\cdot 10^4 \times 0.045}{1.381\cdot 10^{-23}\times 300} = 1.585\cdot 10^{23}. \tag{55}$$

**e)** Vi åpner stoppventilen, og gassene blander seg uten at temperaturen endres. Hva blir trykket i gassblandingen etterpå?

Etterpå har vi ialt $N = N_{Ar} + N_{He}$ atomer i et volum $V = V_{Ar} + V_{He}$. Trykket blir derfor

$$p = \frac{Nk_BT}{V} = \frac{(N_{Ar}+N_{He})\,k_BT}{V_{Ar}+V_{He}} = \frac{p_{Ar}V_{Ar}+p_{He}V_{He}}{V_{Ar}+V_{He}} = 3.56\cdot 10^4 \text{ Pa}. \tag{56}$$

**f)** Hva blir den totale entropi-økningen for gassene i denne irreversible blandingsprosessen?

I prosessen har argon-gassen ekspandert fra volumet $V_{Ar}$ til hele volumet $V_{Ar} + V_{He}$. Siden temperaturen er den samme er dette forbundet med en entropi-økning

$$\Delta S_{Ar} = N_{Ar}k_B \log\left(\frac{V_{Ar}+V_{He}}{V_{Ar}}\right),$$

slik vi har funnet tidligere, jfr. ligning (50). Tilsvarende ekspanderer helium-gassen fra volumet $V_{Ar}$ til hele volumet, slik at

$$\Delta S_{He} = N_{He}k_B \log\left(\frac{V_{Ar}+V_{He}}{V_{He}}\right).$$

Den totale entropiendringen blir derfor

$$\Delta S = k_B \left[ N_{Ar} \log\left(\frac{V_{Ar}+V_{He}}{V_{Ar}}\right) + N_{He} \log\left(\frac{V_{Ar}+V_{He}}{V_{He}}\right)\right]$$
$$= 1.381 \times \left[4.435 \log\left(\frac{0.070}{0.025}\right) + 1.585 \log\left(\frac{0.070}{0.045}\right)\right] \text{ J} = 7.273 \text{ J/K} \quad (57)$$

**g)** Hva ville trykket etterpå, og entropi-endringen, blitt dersom vi hadde byttet ut helium-atomene med like mange argon-atomer? Altså slik at vi starter med to flasker med argongass, den ene med volum $V_1 = 0.025$ m$^3$ gass ved trykk $p_1 = 7.35 \cdot 10^4$ Pa og den andre med $V_2 = 0.045$ m$^3$ gass ved trykk $p_2 = 1.46 \cdot 10^4$ Pa. Temperaturen er fortsatt 300 K.

Siden trykket etterpå bare avhenger av det totale antall molekyler, som er det samme som før, må det være uforandret

$$p = 3.56 \cdot 10^4 \text{ Pa.} \quad (58)$$

Spørsmålet om entropi-økningen er, på det fysikknivå som det her eksamineres i, meget subtilt. Det kreves ikke at kandidatene skal kunne svare riktig på det.

Hvis vi har to beholdere med samme type gass ved samme trykk og temperatur så kan de ikke skje noenting om vi kobler de sammen — vi har allerede gassen jevnt fordelt over totalvolumet. Det kan altså ikke være noen entropi-økning forbundet med dette. Dette til motsetning fra tilfellet der de to gasstypene er forskjellige; da vil hver gasstype ekspandere ut i totalvolumet, med den entropi-endring som dette medfører.

For å beregne entropi-endringen tenker vi oss en reversibel prosess der vi først utjevner trykket mellom de to beholderne, ved å øke volumet $V_1$ isotermt til $V_1' = (p_1/p)V_1$. Dette fører til en entropi-endring (en økning)

$$\Delta S_1 = N_1\, k_B\, \log(V_1'/V_1) = N_1\, k_B\, \log(p_1/p).$$

Samtidig reduserer vi volumet $V_2$ isotermt til $V_2' = (p_2/p)V_2$. Dette fører til en entropi-endring (en reduksjon)

$$\Delta S_2 = N_2\, k_B\, \log(V_2'/V_2) = N_2\, k_B\, \log(p_2/p).$$

Når vi så kobler beholderne sammen skjer det ingenting. Den totale entropi-endringen blir derfor

$$\Delta S = \Delta S_1 + \Delta S_2 =$$
$$1.381 \times \left[4.435 \log\left(\frac{7.35}{3.56}\right) + 1.585 \log\left(\frac{1.46}{3.56}\right)\right] \text{ J} = 2.304 \text{ J.} \quad (59)$$

## Oppgave 3:

**a)** Hva stor er den termiske kubiske utvidelseskoeffisienten $\alpha_V$ for en ideell gass ved 1 atm og 300 K?

Det følger fra tilstandsligningen at vi ved konstant trykk har $pdV = Nk_B dT$. Dette kan omskrives som

$$dV = \frac{V}{T} dT,$$

når vi bruker til tilstandsligningen til å skrive $p = Nk_BT/V$. Dette viser at den termiske utvidelseskoeffisienten er

$$\alpha_V = \frac{1}{300}\ \mathrm{K}^{-1} = 3.333 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{K}^{-1} \tag{60}$$

Merk at vi ikke trengte å vite hva trykket var. Men vi trengte å vite at det var *konstant* under oppvarmingen!

**b)** Hvor mye øker lengden av en 50 m lang stålbjelke ved en temperaturøkning på 30 K, når den lineære termiske utvidelseskoeffisienten for stål er $\alpha_L = 1.1 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$?

Det følger fra definisjonen av $\alpha_L$ at

$$\Delta L = \alpha_L L\, \Delta T = 1.1 \cdot 10^{-5} \times 50 \times 30 = 1.65\ \mathrm{cm}. \tag{61}$$

**Kommentar:** En matematisk purist vil påpeke at ligning (61) slett ikke følger fra definisjonen av $\alpha_L$! Men derimot

$$\frac{dL}{L} = \alpha_L\, dT,$$

som integrert gir (når $\alpha_L$ kan tenkes å være temperaturavhengig)

$$\log\left(\frac{L(T+\Delta T)}{L(T)}\right) = \int_T^{T+\Delta T} \alpha_L\, dT',$$

eller

$$\Delta L = L(T+\Delta T) - L(T) = \left[\exp\left(\int_T^{T+\Delta T} \alpha_L\, dT'\right) - 1\right] L(T). \tag{62}$$

Resultatet (61) følger fordi (i) $\Delta T$ er såpass liten at vi kan se bort fra eventuell temperaturavhengighet i $\alpha_L$, og (ii) $\alpha_L\, \Delta T$ er så liten at vi kan rekkeutvikle eksponensialfunksjonen til første orden. (Matematiske purister risikerer å kaste bort mye god arbeidstid på uvesentligheter.)

**c)** Anta at stålbjelken er innspent slik at den ikke *kan* endre volum. Hvor mye vil det ytre trykket på bjelken måtte øke ved temperaturøkningen over?

**Oppgitt:** Bulkmodul for stål kan her settes til $K = 1.7 \cdot 10^{11}\ \mathrm{N/m^2}$.

Med både trykk- og temperatur-forandring blir volum-endringen generelt

$$dV = V\left(\alpha_S dT - K^{-1} dp\right). \tag{63}$$

Hvis volumet skal være uforandret må $dp/dT = \alpha_S K$. Altså vil det ytre trykket øke med

$$\begin{aligned}\Delta p &= \frac{dp}{dT}\,\Delta T = \alpha_S K\, \Delta T = 3.3 \cdot 10^{-5} \times 1.7 \cdot 10^{11} \times 30\ \mathrm{Pa} \\ &= 1.683 \cdot 10^{8}\ \mathrm{Pa} = 1\,661\ \mathrm{atm}\end{aligned} \tag{64}$$