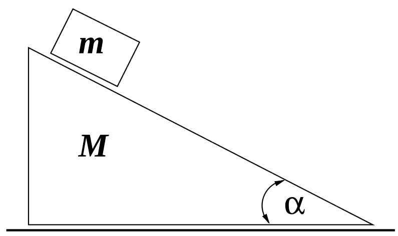
NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Eksamen gitt av Kåre Olaussen

Løsningsforslag til
Eksamen i fag SIF4004 FYSIKK for
ELEKTROTEKNIKK OG TELEKOMMUNIKASJON
Fredag 13. august 1999
Tid: 09:00—15:00

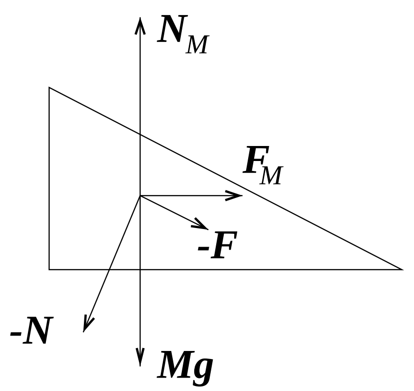
Dette løsningsforslaget er på 6 sider. Merk at det ikke hovedsaklig er skrevet som støtte for sensor og retter, men med tanke på studenter som vil gjennomgå eksamensoppgaven.

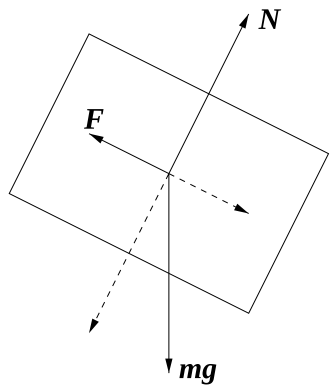
Oppgave 1:



Figuren til høyre illustrerer en firkantet kloss med masse m oppå en trekantet kloss med masse M som står på et horisontalt underlag. Den statiske og dynamiske friksjonskoeffisienten mellom klossene m og M, og mellom klossen M og underlaget, antas like store lik μ.

a) Figurene under viser kreftene på klossene M (til venstre) og m (til høyre). Vi har dekomponert tyngdekraften mg i komponenter parallellt med ($mg\sin\alpha$) og normalt på ($mg\cos\alpha$) skråkanten.





$N = mg\cos\alpha$ er normalkraften fra klossen M på klossen m, og $F = \min\{mg\sin\alpha, \mu N\}$ er friksjonskraften fra klossen M på klossen m. Ved Newton's 3. lov virker det like store, motsatt rettede krefter fra klossen m på klossen M. N_M er kraften fra underlaget på klossen M, og F_M den tilhørende friksjonskraften.

b) Sålenge

$$mg\sin\alpha \le \mu N = \mu\, mg\cos\alpha \tag{1}$$

vil alle kreftene på klossen m balansere hverandre, og den forblir i ro. Dette skjer sålenge $\tan\alpha \le \mu$, så den største verdi som vinkelen α kan ha er

$$\alpha_{\max} = \arctan\mu \tag{2}$$

c) Klossen M kan ikke begynne å skli før m gjør det, så vi antar at m sklir mens M er i ro. Da er $F = \mu\, N = \mu\, mg\cos\alpha$,

$$N_M = Mg + N\cos\alpha + F\sin\alpha = Mg + mg\left(\cos^2\alpha + \mu\cos\alpha\sin\alpha\right) \tag{3}$$

og

$$\begin{aligned} F_M &= N\sin\alpha - F\cos\alpha = mg\left(\cos\alpha\sin\alpha - \mu\cos^2\alpha\right) \\ &\le \mu\, N_M = \mu\, Mg + \mu\, mg\left(\cos^2\alpha + \mu\cos\alpha\sin\alpha\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Den siste ligningen kan omskrives på formen

$$\frac{m}{M} \le \frac{\mu}{\cos\alpha\left[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right]}$$

Den største verdien som masseforholdet kan ha er altså

$$\left(\frac{m}{M}\right)_{\max} = \frac{\mu}{\cos\alpha\left[(1-\mu^2)\sin\alpha - 2\mu\cos\alpha\right]} = \frac{16}{47} \approx 0.34 \tag{5}$$

når vi setter inn $\mu = \frac{1}{8}$ og $\cos\alpha = \sin\alpha = 1/\sqrt{2}$ (for $\alpha = \pi/4$).

d) Vi analyserer først bevegelsen fra det (akselererte) koordinatsystemet der massesenteret til M er i ro i origo. Når klossen m har beveget seg et stykke $dy = v'_y dt$ i vertikal retning og $dx = v'_x dt$ i horisontal retning må

$$\tan\alpha = \frac{v'_y}{v'_x}$$

for at bevegelsen skal følge skråkanten. I forhold til et fast koordinatsystem (umerkede størrelser) er $v'_y = v_y$ og $v'_x = v_x + V_x$. Altså har vi sammenhengen

$$\tan\alpha = \frac{v_y}{v_x + V_x}. \tag{6}$$

e) Den konserverte energien til systemet er (opp til en konstant) lik summen av den kinetiske energien til begge klossene pluss den potensielle energien til klossen m,

$$E = \frac{1}{2}MV_x^2 + \frac{1}{2}m\left(v_x^2 + v_y^2\right) + mgy. \tag{7}$$

Siden det ikke virker noen netto horisontale krefter på systemet må bevegelsesmengden i x-retningen være konstant

$$P_x = -MV_x + mv_x. \tag{8}$$

I disse uttrykkene kan vi sette inn føringsbetingelsen som vi fant i forrige punkt

$$v_y = (v_x + V_x)\tan\alpha. \tag{9}$$

f) Siden systemet startet ut i ro må $P_x = 0$. Fra dette og føringsbetingelsen finner vi sammenhengene

$$V_x = \frac{m}{M} v_x, \quad v_y = \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan\alpha \, v_x. \tag{10}$$

Når klossen m har falt en høyde h er den potensielle energien mgh konvertert til kinetisk energi. Altså har vi sammenhengen

$$mgh = \frac{1}{2} M V_x^2 + \frac{1}{2} m \left(v_x^2 + v_y^2\right) = \frac{1}{2} m \left[1 + \frac{m}{M} + (1 + \frac{m}{M})^2 \tan^2\alpha\right] v_x^2 \tag{11}$$

Fra denne kan vi finne v_x, V_x og v_y

$$\begin{aligned} v_x &= \sqrt{\frac{2gh}{1 + m/M + (1 + m/M)^2 \tan^2\alpha}}, \\ V_x &= \sqrt{\frac{2gh}{1 + m/M + (1 + m/M)^2 \tan^2\alpha}} \, \frac{m}{M}, \\ v_y &= \sqrt{\frac{2gh}{1 + m/M + (1 + m/M)^2 \tan^2\alpha}} \left(1 + \frac{m}{M}\right) \tan\alpha. \end{aligned} \tag{12}$$

g) Vi kan skrive sammenhengen mellom $v_y = dh/dt$ og h på formen

$$v_y = \sqrt{\frac{2h}{g_{\text{eff}}}} \tag{13}$$

der

$$g_{\text{eff}} = \frac{(1 + m/M)^2 \tan^2\alpha}{1 + m/M + (1 + m/M)^2 \tan^2\alpha} \, g. \tag{14}$$

Ligning (13) er presis den sammenhengen som gjelder for fall i tyngdefeltet, bortsett fra at tyngdens akselerasjon g er erstattet med en effektiv verdi g_{eff}. Sammenhengen mellom fallhøyde og tid er da gitt ved $h = \frac{1}{2} g_{\text{eff}} t^2$, eller

$$t = \sqrt{2h g_{\text{eff}}}. \tag{15}$$

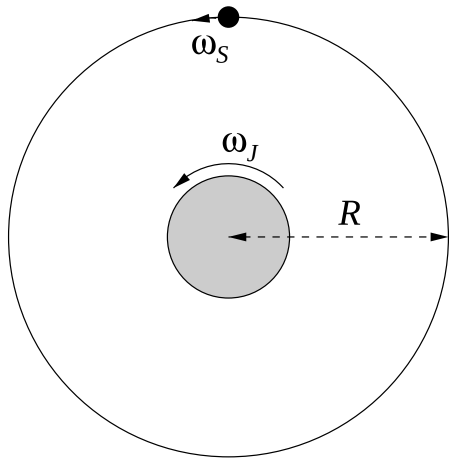
Når vi setter inn $\tan\alpha = 1$ (for $\alpha = \pi/4$) og $m/M = \frac{1}{2}$ finner vi

$$g_{\text{eff}} = \frac{3}{5} g = 5.886 \text{ m/s}^2. \tag{16}$$

Med $h = 0.5$ m gir dette en falltid

$$t = \sqrt{\frac{5 \text{ m}}{3g}} = 0.412 \text{ s}. \tag{17}$$

Oppgave 2:
I denne oppgaven skulle man se på en liten satelitt (slik at den kunne regnes for punktformet) i en sirkulær bane med radius R i ekvatorplanet om jorda.



a) Vi velger koordinatsystem slik at satelitten beveger seg i xy-planet med jordas sentrum i origo. Da gjelder

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= R\left[\cos\left(2\pi t/T_S\right)\,\hat{e}_x + \sin\left(2\pi t/T_S\right)\,\hat{e}_y\right],\\ \vec{v}(t) &= \left(2\pi t/T_S R\right)\left[-\sin\left(2\pi t/T_S\right)\,\hat{e}_x + \cos\left(2\pi t/T_S\right)\,\hat{e}_y\right],\\ \vec{a}(t) &= -\left(2\pi/T_S\right)^2 R\left[\cos\left(2\pi t/T_S\right)\,\hat{e}_x + \sin\left(2\pi t/T_S\right)\,\hat{e}_y\right].\end{aligned} \tag{18}$$

Vi noterer sammenhengen

$$\vec{a}(t) = -(2\pi/T_S)^2\,\vec{r}(t) \equiv -\omega_S^2\,\vec{r}(t). \tag{19}$$

b) Newton's gravitasjonslov sier

$$\vec{F} = \frac{mMG}{r^2}\,\hat{r} = \frac{mMG}{r^3}\,\vec{r}, \tag{20}$$

så ved å sammenligne Newton's andre lov, $\vec{F} = m\vec{a}$, med ligning (19) og (20) finner vi sammenhengen mellom omløpstid T_S og baneradius R

$$\frac{R^3}{T_S^2} = \frac{MG}{4\pi^2}. \tag{21}$$

Dette er Keplers tredje lov. I (21) er M jordas masse og G gravitasjonskonstanten.

c) På jordoverflata er gravitasjonskraften

$$\vec{F} = -\frac{mMG}{R_J^2} = -mg\,\hat{r}, \tag{22}$$

der g er tyngdens akselerasjon. Jordas masse er altså

$$M = \frac{gR_J^2}{G} = \frac{9.81 \times 4 \cdot 10^{14}}{\pi^2 \times 6.672\,59 \cdot 10^{-11}}\ \text{kg} = 5.96 \cdot 10^{24}\ \text{kg}. \tag{23}$$

Kommentar: Dette svaret avviker littegrann fra den verdien som oppgis i fysiske tabeller, $5.98 \cdot 10^{24}$ kg. Dette skyldes sannsynligvis (i) at jorda ikke er helt kuleformet, og (ii) at oppgitt verdi for tyngdens akselerasjon inkorporerer rotasjonseffekter.

d) Ved bruk av sammenhengen $MG = gR_J^2$ kan vi omskrive Keplers tredje lov på formen

$$T_S^2 = \frac{4\pi^2 R_J}{g} \left(\frac{R}{R_J}\right)^3. \tag{24}$$

Hvis satelitten skal være geostasjonær må T_S være lik jordas omløpstid, $T_J = 23$ timer og 56 minutter. Dvs. at baneradien må være

$$R = \left(\frac{g\, T_J^2}{4\pi^2 R_J}\right)^{1/3} R_J = \left(\frac{g}{a_s}\right)^{1/3} R_J. \tag{25}$$

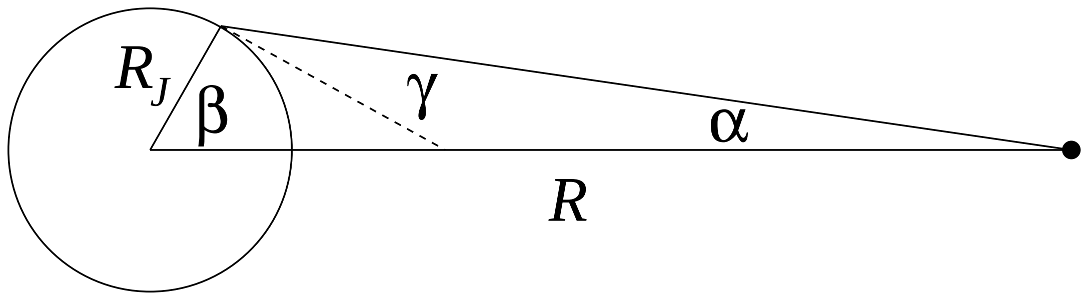
Her er

$$a_s = (2\pi/T_J)^2\, R_J = 0.034\ \mathrm{m/s^2} = 3.45 \cdot 10^{-3}\, g \tag{26}$$

sentripetalakselerasjonen ved ekvator pga. jordrotasjonen. En geostasjonær satelitt må derfor ha baneradius

$$R = \frac{10}{3.45^{1/3}}\, R_J \approx 6.618\, R_J \approx 42\,132\ \mathrm{km}. \tag{27}$$

e) Figuren under viser et skjematisk snitt gjennom Trondheim, satelitt og jordas sentrum



Den søkte størrelsen er vinkelen γ. Siden summen av vinklene i en trekant er lik π har vi sammenhengen

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}. \tag{28}$$

Her er $\beta = 63.5°$. Videre ser vi av figuren at

$$\tan\alpha = \frac{R_J \cos\beta}{R - R_J \sin\beta} = 0.078, \tag{29}$$

dvs. $\alpha = 4.46°$. Altså finner vi

$$\gamma \approx 22°. \tag{30}$$

Oppgave 3:

a) Dette er essensielt oppgave 21, øving 12 (SIF4004 høsten 1999).

b) Dette er essensielt oppgave 21, øving 12 (SIF4004 høsten 1999).

c) Dette er essensielt oppgave 21, øving 12 (SIF4004 høsten 1999).

d) Dette er essensielt oppgave 21, øving 12 (SIF4004 høsten 1999).

e) Siden 1 m^2 flate vil samle opp 0.5 kW $\times$ 200 h = 100 kWh pr. år trenger vi

$$A = 200 \text{ m}^2 \tag{31}$$

for å høste 20 000 kWh.

f) Vi vil bruke 10 000 kWh = $3.6 \cdot 10^{10}$ J til å varme opp vann med $\Delta T = 40$ K. Siden det trengs $Q = 40 \times 4\,180$ J for å varme opp 1 kg vann, må vi ha en mengde

$$M = \frac{3.6 \cdot 10^{10}}{40 \times 4180} \text{ kg} = 0.2153 \cdot 10^6 \text{ kg}. \tag{32}$$

Siden 1 m^3 vann er omtrent 1000 kg må tanken ha et volum på

$$V = 215.3 \text{ m}^3 \tag{33}$$

Rent teknisk ganske så overkommelig (spesielt sammenlignet fusjonskraftverk), men med dagens oljepriser ikke noen økonomisk gunstig løsning.