Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i SIF4004 FYSIKK for ELEKTRONIKK OG TEKNISK KYBERNETIKK

Onsdag 29. november 2000
09:00–15:00

Eksamen gitt av Kåre Olaussen.

Oppgave 1

a) Tyngdens akselerasjon g og Newton's gravitasjonskonstant G står oppgitt i vedlegget. Anta at jorda er helt kuleformet, med omkrets $O_j = 40\,000$ km.

Hva er jordas masse, M_j?

Fra Newton's gravitasjonslov mellom punktmasser,

$$\vec{F} = -\frac{m_1 m_2 G \vec{r}}{r^3}, \tag{1}$$

og det faktum at gravitasjonskraften fra et kulesymmetrisk legeme virker som om all masse var plassert i sentrum, følger det at gravitasjonskraften fra hele jorda på en punktmasse nær jordas overflate gir opphav til en akselerasjon

$$g = \frac{M_j G}{R_j^2} \tag{2}$$

rettet mot jordas senter. Det er i hovedsak denne størrelsen vi identifiserer med tyngdens akselerasjon. Vi kan derfor måle jordas masse til

$$M_j = \frac{g R_j^2}{G} = \frac{g O_j^2}{4\pi^2 G} = 5.96 \cdot 10^{24} \text{ kg}. \tag{3}$$

Kommentarer:

Den numeriske verdien over følger fra de verdiene for g og G som var oppgitt i vedlegget. Den virkelige jordmassen er bittelitt større enn dette. Hovedårsaken er at verdien $g = 9.81$ m/s^2 inkluderer bidrag fra sentrifugalkraften pga. jordas rotasjon.

Den hyppigste feilen på dette punktet er at kandidaten regner ut feil jordradius R_j fra den oppgitte omkretsen. *Slurv og skam*! Noen kommer fram til et uttrykk der $M_j \propto R_j$ eller $M_j \propto R_j^3$, noe som gir store utslag i den numeriske verdien. Dette burde ha blitt oppdaget ved dimensjonsanalyse.

b) Hva er jordas midlere massetetthet, ρ_j?

Med jordas volum, $V_j = (4\pi/3)R_j^3 = O_j^3/(6\pi^2)$, fås

$$\rho_j = \frac{M_j}{V_j} = \frac{6\pi^2 M_j}{O_j^3} = \frac{3g}{2GO_j} = 5.51 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3. \tag{4}$$

Kommentarer:

Den hyppigste feilen er at kandidaten bruker et galt (ofte også et *dimensjonsmessig* galt) uttrykk for V_j. Det kunne forøvrig lages en meget variert formelsamling av de uttrykkene som alt-ialt ble brukt for sammenhengene mellom radius, omkrets og areal av en sirkel, og sammenhengen mellom radius, overflate og volum av en kule. Alle som var tilstede på spørretimen før eksamen burde ha fått dette rett — der ble understreket hva de korrekte uttrykkene er, og at de er vanlige feilkilder.

Det forventes å være almennkunnskap at kondensert materie veier noen tonn pr. kubikkmeter; den som kom fram et resultat som avvek med størrelsesordener fra dette, og ikke kommenterte urimeligheten, har fortjent svidd i sensuren.

c) Anta for enkelhets skyld jordas massetetthet er konstant gjennom det hele.

Hva er jordas treghetsmoment I_j om rotasjonsaksen gjennom polene?

For beregning av jordas treghetsmoment bruker vi oppgitt formel for treghetsmomentet til en homogen kule,

$$I_j = \frac{2}{5} M_j R_j^2 = \frac{2}{5} \frac{gR_j^4}{G} = \frac{1}{40\pi^4} \frac{gR_j^4}{G} = 9.66 \cdot 10^{37} \text{ kg m}^2. \tag{5}$$

Kommentarer:

Dette er et overestimat i forhold til det riktige treghetsmomentet til jorda, som i virkeligheten har størst massetetthet nær sentrum. En større andel av massen ligger derfor nærmere rotasjonsaksen, og gir et mindre bidrag til treghetsmomentet enn det vi regner ut.

Noen kandidater valgte å beregne I_j fra den generelle definisjonen for treghetsmoment. Dette er en angrepsmåte som hvertfall oppgavegiver har stor sympati for, selv om det rent eksamenstaktisk kanskje ikke var så lurt — der var mange andre delpunkter å bruke tid og energi på.

Og dessverre er det noen bruker feil avstand i uttrykket for treghetsmoment, nemlig avstanden til jordas sentrum istedet for til rotasjonsaksen. Det første gir et resultat som er 50% for stort,

$$I_{j,\text{feil}} = 4\pi\rho_j \int_0^{R_j} r^2 dr\, r^2 = \frac{4\pi}{5}\rho_j\, R_j^5 = \frac{3}{5} M_j R_j^2,$$

istedet for

$$I_j = 2\pi\rho_j \int_{-R_j}^{R_j} dz \int_0^{\sqrt{R_j^2 - z^2}} \rho d\rho\, \rho^2 = \pi\rho_j \int_0^{R_j} dz\, \left(R_j^2 - z^2\right)^2 = \frac{8\pi}{15}\rho_j R_j^5 = \frac{2}{5} M_j R_j^2. \tag{6}$$

d) Jorda roterer en omdreining i løpet av 86 164 sekunder. Hva er jordas rotasjonsenergi?

La $T_j = 86\,164$ s være perioden for én omdreining. Da er rotasjonsenergien

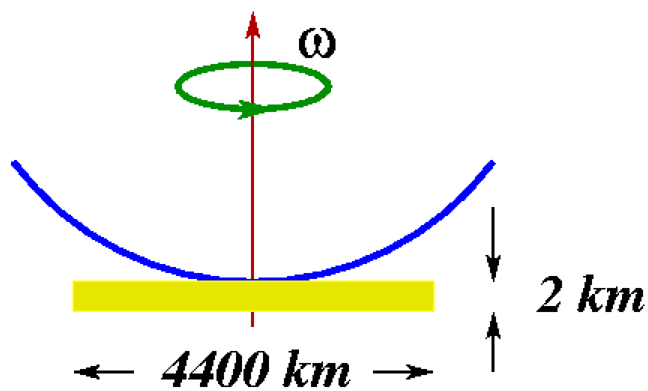
$$K_r = \frac{1}{2} I_j\, \omega_j^2 = \frac{1}{2} I_j \left(\frac{2\pi}{T_j}\right)^2 = 2.57 \cdot 10^{29} \text{ J}. \tag{7}$$

Kommentarer:

Det er ikke lett å ha noe forhold til en slik energimengde. For sammenligning kan vi ta utgangspunkt i at det nåværende effektforbruket til hele jordas befolkning er av størrelsesorden 10 $TW = 10^{13}$ W, dvs. et energiforbruk på $3 \cdot 10^{20}$ J pr. år. Med dette energiforbruket ville jordas rotasjonsenergi rekke til ca. 800 millioner år (i virkeligheten en god del kortere, fordi vår I_j er for stor). Ved bruk av kraftverk som utnytter tidevannet tapper vi faktisk litt av denne rotasjonsenergien idag.

Den vanligste feilen her er at kandidaten glemmer faktoren 2π i uttrykket for ω_j. Noen regner også ut en rotasjonshastighet $v_j = \omega_j R_j$ og bruker denne. Et uttrykk som $\frac{1}{2} I_j v_j^2$ viser med all tydelighet at kandidaten ikke har skjønt bæra, mens $\frac{1}{2} M_j v_j^2$ tross alt blir av riktig størrelsesorden (en faktor $\frac{5}{2}$ for stor).

e) I det følgende skal du ta eksplistt hensyn til at det ligger en stor ismasse i Antarktis (rundt sydpolen). Se for enkelhets skyld på denne som en flat, sirkulær og homogen skive med radius 2 200 km og tykkelse 2 km, med jordas rotasjonsakse gjennom sentrum av skiva og normalt på denne, som skissert på figuren til høyre. Du kan sette massetettheten til is til 917 kg/m^3.
Hva er treghetsmomentet $I_{\rm is}$ til denne ismassen, målt i forhold til rotasjonsaksen gjennom polene?



For beregning av isens treghetsmoment bruker vi oppgitt formel for treghetsmomentet til en homogen sylinder,

$$I_{\rm is} = \frac{1}{2} M_{\rm is} R_{\rm is}^2 = \frac{1}{2} \left(\pi \rho_{\rm is} R_{\rm is}^2 h_{\rm is}\right) R_{\rm is}^2 = 6.75 \cdot 10^{31} \text{ kg m}^2. \tag{8}$$

f) Anta at hele ismassen i Antarktis smelter, og fordeler seg som vann jevnt over hele jordas overflate.

Hvor tykt blir dette vannlaget?

Massen til isen er

$$M_{\rm is} = \pi \rho_{\rm is} R_{\rm is}^2 h_{\rm is} = 2.79 \cdot 10^{19} \text{ kg}. \tag{9}$$

Etter smelting ($M_{\rm is} = M_{\rm vann}$) vil dette ta opp et volum $V_{\rm vann} = 2.79 \cdot 10^{16}$ m^3. Jevnt fordelt over hele jordas overflate (areal $A_j = 4\pi R_j^2$) utgjør dette en tykkelse

$$h_{\rm vann} = \frac{V_{\rm vann}}{A_j} = 54.76 \text{ m}. \tag{10}$$

Kommentarer:

Dette resultatet er ganske realistisk. Det skal være ca. 30 millioner (km)^3 is i Antarktis; dette utgjør 90% av jordas beholdning av ferskvann. Det meste av denne isen står på fast land, så Arkimedes lov har liten betydning. Siden bare 5/6 av jordas overflate er hav ville ikke smeltevannet fordele seg helt jevnt over jordoverflaten, så havnivået ville antagelig stige noe mere enn resultatet (10).

Foruten feil i beregningen av volum er den vanligste feilen at kandidaten ikke tar hensyn til at tettheten til is er mindre enn vann. Dette gir et tykkelse som er en faktor 1000/917 for stor.

g) Hvor mye endrer døgnets lengde seg på grunn av nedsmeltingen over?

Jordas dreieimpuls, $L_j = I_j(t)\,\omega_j(t)$, etter bevart under smelteprosessen, slik at

$$\omega_j(\text{etter}) = \frac{I_j(\text{før})}{I_j(\text{etter})}\,\omega_j(\text{før}),$$

eller

$$\Delta T_j = T_j(\text{etter}) - T_j(\text{før}) = \frac{I_j(\text{etter}) - I_j(\text{før})}{I_j(\text{før})}\,T_j(\text{før}) \approx \frac{\Delta I_j}{I_j}\,T_j. \tag{11}$$

Vi må derfor beregne endringen $\Delta I_j = I_{\text{vann}} - I_{\text{is}}$ i jordas treghetsmoment når isen smelter. Vi har allerede funnet $I_j = I_{\text{is}}$. For å finne treghetsmomentet til vannet regner vi ut differansen mellom treghetsmomentet til en vannkule med radius $R_j + h_{\text{vann}}$ og radius R_j. Denne er

$$\begin{aligned} I_{\text{vann}} &= \frac{8\pi}{15}\,\rho_{\text{vann}}\left[(R_j + h_{\text{vann}})^5 - R_j^5\right] \approx \frac{8\pi}{3}\,\rho_{\text{vann}}\,h_{\text{vann}}\,R_j^4 = \frac{2}{3}\,M_{\text{vann}}\,R_j^2 \\ &= 7.53 \cdot 10^{32}\ \text{kg m}^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Innsatt i ligning (11) gir dette en økning i døgnets lengde på

$$\Delta T = \frac{I_{\text{vann}} - I_{\text{is}}}{I_j}\,T_j = 0.61\ \text{s}. \tag{13}$$

Kommentarer:

Resultatet over medfører at 400 omløp rundt sola vil ta ca. ett døgn mindre enn idag — nok til at det blir nødvendig med en endring av skuddårsalgoritmen. Og i virkeligheten ville effekten bli større enn ligning (13) tilsier, fordi vi bruker en for stor verdi på I_j.

Merk at det er irrelevant om vi inkluderer I_{is} i uttrykket for I_j eller ikke, siden forholdet mellom disse er så lite — mindre enn 10^{-6}. Det som er litt viktig (en 10% effekt) er at I_{is} blir inkludert i uttrykket for *endringen* ΔI_j.

Dette delpunktet involverer flere momenter (inkludert en prøve på evnen til å løse sammensatte problemstillinger) og teller derfor dobbelt i sensuren. Som forventet var det *svært få* som klarte å løse oppgaven helt riktig.

Svært mange benytter feil konserveringslov, og antar at det er rotasjonsenergien K_r som er bevart. Med riktig regning videre fra denne antagelsen vil man finne halvparten så stor økning i døgnets lengde,

$$\Delta T_j = \left(\sqrt{\frac{I_j(\text{etter})}{I_j(\text{før})}} - 1\right) T_j \approx \frac{\Delta I_j}{2I_j}\,T_j.$$

Gledelig mange innser at jordas treghetsmoment øker fordi jordradien øker med h_{vann}, men tar ikke hensyn til at det ekstra sjiktet har tetthet ρ_{vann} istedet for ρ_j. De får derfor et bidrag som er ca. 5.5 ganger for stort.

Noen får problemer med numerisk nøyaktighet fordi de regner ut $I_j(R_j + h_{\text{vann}})$ og $I_j(R_j)$, eller tilsvarende størrelser, numerisk før de tar differansene. Dette er kalkulatorbrukens forbannelse! Og til stor hindring for innsikt i de relevante størrelsene i problemet.

Noen kommer på besyndelig vis trekkende med Kepler's tredje lov. Til disse vil jeg påpeke at en ingeniør som ikke forstår formlene sine er minst like farlig som en blind sjåfør som absolutt vil kjøre selv!

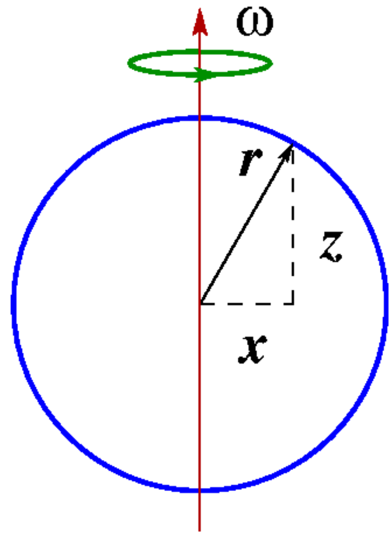
h) På grunn av rotasjonen er ikke jorda helt kuleformet. Anta at jordoverflaten overalt står normalt på den effektive tyngdeakselerasjonen

$$\vec{g}_{\text{eff}} \approx -\frac{GM_j\vec{r}}{R_j^3} - \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}), \tag{14}$$

der $-\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \omega^2\,\vec{r}_\perp$ er "sentrifugalakselerasjonen" ved overflaten, og $\vec{r}$ er en vektor fra jordas sentrum til overflaten.
Vis at jordoverflaten kan beskrives som en ellipsoide,

$$(1-\varepsilon)(x^2+y^2)+z^2 = R_j^2, \tag{15}$$

og bestem parameteren ε.
Tips: Pga. rotasjonssymmetri er det tilstrekkelig å analysere hvordan jordoverflaten snitter xz-planet, dvs. sette $y=0$ og f.eks. finne et uttrykk for dz/dx, der $z(x)$ beskriver kurven der jordoverflaten snitter xz-planet.



Hvis vi restrikterer problemet til xz-planet kan den effektive tyngdeakselerasjonen skrives

$$\vec{g}_{\text{eff}} = -\frac{GM_j}{R_j^3}\left[\left(1-\frac{\omega^2R_j^3}{GM_j}\right)x\,\hat{e}_x + z\,\hat{e}_z\right]. \tag{16}$$

Tangenten $\vec{t} = \hat{e}_x + \frac{dz}{dx}\,\hat{e}_z$ til jordoverflaten må stå normalt på $\vec{g}_{\text{eff}}$, dvs. at

$$\vec{t}\cdot\vec{g}_{\text{eff}} = (1-\varepsilon)\;x + z\,\frac{dz}{dx} = 0, \tag{17}$$

der

$$\varepsilon = \frac{\omega^2R_j^3}{GM_j} = 0.0035. \tag{18}$$

Altså er overflaten beskrevet ved differensialligningen

$$(1-\varepsilon)\,x\,dx + z\,dz = \frac{1}{2}d\left[(1-\varepsilon)\,x^2+z^2\right] = 0. \tag{19}$$

Hvis vi lar $R_{\text{pol}} \approx R_j$ bety avstanden fra jordas sentrum til polene ($x=0$) blir overflaten i xz-planet beskrevet av ellipsen

$$(1-\varepsilon)\,x^2 + z^2 = R_{\text{pol}}^2,$$

eller, hvis vi utvider til alle retninger ved å anta rotasjonssymmetri om z-aksen, sfæroiden

$$(1-\varepsilon)\,(x^2+y^2)+z^2 = R_{\text{pol}}^2. \tag{20}$$

Kommentarer:

Ligning (20) sier at forskjellen i avstand fra jordas sentrum til polene og ekvator er

$$\Delta R_j = R_{\text{ekvator}} - R_{\text{pol}} = \left(\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}}-1\right)R_{\text{pol}} \approx \frac{1}{2}\,\varepsilon\,R_j \approx 11 \text{ km}.$$

Meget interessant (for en fysiker) er dette bare halvparten av den observerte verdien, $R_{\text{ekvator}} - R_{\text{pol}} \approx$ 22 km. En årsak til denne forskjellen er at deformasjonen av jorda også fører til at gravitasjonskraften endrer seg fra det fra det rent kulesymmetriske. Virkningen av dette ble regnet ut av Maclaurin allerede på 1700–tallet. Når man antar at tettheten er konstant fås

$$\Delta R_j = R_{\text{ekvator}} - R_{\text{pol}} \approx \frac{5}{4}\,\varepsilon\, R_j \approx 27.5 \text{ km}. \tag{21}$$

Dette resultatet er omtrent 25% for stort, noe som sannsynligvis skyldes at tettheten til jorda er vesentlig større nær sentrum.

Det var skuffende få som prøvde seg på dette delpunktet, enda det har vært gitt en svært lik øvingsoppgave. De som har vanskeligheter med å håndtere fysikkproblemer som involverer differensialregning (det ser dessverre ut til å være flertallet) kan allikevel komme et stykke på vei med denne oppgaven ved ren dimensjonsanalyse. Den dimensjonsløse parameteren ε kan bare avhenge av jordas vinkelhastighet ω (med dimensjon s^{-1}) og gravitasjonskraften i kombinasjonen GM_j/R_j^3 (med dimensjon s^{-2}). Fra dette kan man konkludere at ε må være en funksjon av forholdet $\omega^2 R_j^3/(GM_j)$, og at denne funksjonen må være null når ω er null.

Oppgave 2

a) Jern har atomvekt 55.8. Hva er den spesifikke varmekapasiteten c_{jern} til jern ifølge Dulong og Petit's lov?

Definisjonen av Avogadros tall er slik at N_A atomer med atomvekt A veier $A \cdot 10^{-3}$ kg. N_A jernatomer veier derfor $55.8 \cdot 10^{-3}$ kg, og har ifølge Dulong og Petit's lov en varmekapasitet $C_V = 3N_A\, k_B$. Den spesifikke varmekapasiteten til jern er derfor

$$c_{\text{jern}} = \frac{3N_A\, k_B}{55.8 \cdot 10^{-3} \text{ kg}} = 447\, \frac{\text{J}}{\text{kg K}}. \tag{22}$$

Kommentar: En hyppig feil er at faktoren A settes i teller istedet for nevner. Mange glemmer også at N_A er definert i forhold til gram istedet for kilogram (enda dette sto i vedlegget). De som gjør begge feilene får et svar som er $55.6^2/1000$ ganger for stort (men numerisk sett ikke aldeles urimelig).

b) Temperaturen i jordskorpa øker med ca. 20 K pr. km dybde (nær overflaten). Dette betyr at det går en varmestrøm fra jordas indre til overflaten. Jordskorpa (som er en dårlig varmeleder) har en termisk ledningsevne $\lambda = 3 \text{ Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$

Hvor stor er varmestrømtettheten (varmefluksen) j_Q fra jordas indre til overflaten?

Fra formelen for varmeledning, som sto oppgitt i vedlegget,

$$j_Q = \lambda\, \frac{dT}{dx} = 3\, \frac{\text{W}}{\text{mK}} \cdot \frac{20\,\text{K}}{1000\,\text{m}} = 60 \cdot 10^{-3}\, \frac{\text{W}}{\text{m}^2}. \tag{23}$$

Kommentar: Skuffende mange presterer her å få et svar som er 1000 ganger for stort. *Slurv og skam*! (Hvis hver enebolig med 100 m^2 grunnflate mottok en varmestrøm på 6 kW fra jordas indre ville vi ha løst oppvarmingsproblemet i Norge på en annen måte enn idag.)

c) Hvor stor er den totale varmestrømmen I_Q til overflaten?

$$I_Q = 4\pi R_j^2\, j_Q = 3.06 \cdot 10^{13} \text{ W} = 30.6 \text{ TW}. \tag{24}$$

Kommentar: Til sammenligning er det totale effektforbruket til hele jordas befolkning ca. 10 TW. Geotermisk varme er en ganske viktig energikilde idag (spesielt på steder som Island); i 1999 utgjorde den samlede verdensproduksjonen vel 8.2 GW.

Jeg har hørt nevnt (men ikke fått verifisert) at den virkelige varmestrømmen fra jordas indre er ca. 10 ganger større enn det man fant i denne oppgaven. Hvertfall den utnyttbare energien opptrer i forbindelse med vulkansk aktivitet, der varmetransporten skjer ved konveksjon (og derfor er mye mer effektiv).

d) Som en grovt forenklet modell antar vi at jordskorpa er 250 km tykk, og at alt innenfor dette består av jern med massetetthet $\rho_{\text{jern}} = 7\,900\ \text{kg/m}^3$. Siden jern er en ganske god varmeleder antar vi at jordtemperaturen T nedenfor 250 km dybde er konstant.

Hva er varmekapasiteten C_V til jorda innenfor jordskorpa?

Vi finner først massen til jernkjernen,

$$M_{\text{jern}} = \frac{4\pi}{3}(R_j - 250\ \text{km})^3\ \rho_{\text{jern}} = 7.57 \cdot 10^{24}\ \text{kg}. \tag{25}$$

Dette er litt mere enn den totale massen M_j som vi fant i oppgave **1a)**, så vår modell for jordas indre er nok noe overforenklet. Iallefall gir dette en total varmekapasitet

$$C_{\text{jernkjerne}} = M_{\text{jern}}\, c_{\text{jern}} = 3.38 \cdot 10^{27}\ \frac{\text{J}}{\text{K}}. \tag{26}$$

e) Anta at jordas overflate har temperaturen 290 K. Hva er den indre energien U til jorda innenfor jordskorpa?

Vi regner temperaturen i jernkjerna til

$$T_1 = (290 + 20 \times 250)\ \text{K} = 5\,290\ \text{K}, \tag{27}$$

slik at den indre energien blir

$$U = C_{\text{jernkjerne}}\, T_1 = 1.79 \cdot 10^{31}\ \text{J}. \tag{28}$$

Jordas termiske energi er altså ca. 100 ganger større enn rotasjonsenergien.

Kommentar: Det var en god del spørsmål under eksamen om man skulle ta hensyn til jordas krumning i denne oppgaven. For enkelhets skyld var det ikke meningen at man skulle gjøre det, selv om det egentlig er en ganske grov tilnærming. Under stasjonære forhold er den totale varmestrømmen $I_Q = 4\pi(R_j - h)^2\, j_Q(h)$ den samme i alle dybder h. Dvs. at

$$j_Q(h) = j_Q(R_j)\,\frac{R_j^2}{(R_j - h)^2} = \lambda\,\frac{dT(h)}{dh}, \tag{29}$$

slik at det korrekte temperaturfallet fra overflaten til 250 km dybde blir (med $h_0 = 250$ km)

$$\Delta T = 20\,\frac{\text{K}}{\text{km}} \times \int_0^{h_0} dh\,\frac{R_j^2}{(R_j - h)^2} = 20\,\frac{\text{K}}{\text{km}} \times \frac{h_0}{1 - h_0/R_j} = 5\,204\ \text{K}. \tag{30}$$

Dette gir en høyere temperatur, $T_1 = 5\,494$ K, og indre energi $U = 1.86 \cdot 10^{31}$ J.

f) Med varmestrømmen I_Q, hvor lang tid vil det ta å kjøle ned temperaturen i jordas indre med 1 K?

Ved energibevaring har vi, sålenge ΔT er så liten at vi kan regne varmestrømmen I_Q for konstant,

$$I_Q \cdot t_{\text{nedkjøling}} = C_{\text{jernkjerne}} \Delta T. \tag{31}$$

Med $\Delta T = 1\,\text{K}$ blir nedkjølingstiden

$$t_{\text{nedkjøling}} = \frac{C_{\text{jernkjerne}} \times 1\ \text{K}}{I_Q} = 1.11 \cdot 10^{14}\ \text{s} \approx 3.51 \cdot 10^6\ \text{år}. \tag{32}$$

g) Anta at temperaturen ved jordas overflate holdes konstant lik 290 K.

Hvor lang tid vil det ta å kjøle ned temperaturen i jordas indre til 1 000 K?

Når jernkjerna har temperaturen T blir varmestrømmen

$$I_Q = \frac{4\pi\lambda\, R_j^2}{h_0}\,\Delta T, \tag{33}$$

der temperaturfallet $\Delta T = (T - 290\,\mathrm{K})$ og $h_0 = 250$ km. Ved energibevaring har vi

$$I_Q = -C_{\text{jernkjerne}}\,\frac{dT}{dt} = -C_{\text{jernkjerne}}\,\frac{d\Delta T}{dt}. \tag{34}$$

Ved kombinasjon av disse uttrykkene finner vi

$$\frac{d\Delta T}{dt} = -\frac{4\pi\lambda\, R_j^2}{C_{\text{jernkjerne}} h_0}\,\Delta T = -\frac{1}{t_0}\Delta T, \tag{35}$$

der

$$t_0 = \frac{C_{\text{jernkjerne}} h_0}{4\pi\lambda\, R_j^2} = 5\,000\; t_{\text{nedkjøling}} = 5.54\cdot 10^{17}\ \mathrm{s}. \tag{36}$$

Løsningen på differensialligningen (35) er

$$\Delta T(t) = \Delta T(0)\; \mathrm{e}^{-t/t_0} = 5\,000\ \mathrm{K}\ \mathrm{e}^{-t/t_0}. \tag{37}$$

For nedkjøling til en temperatur $T = 1\,000$ K, dvs. $\Delta T(t) = (1\,000 - 290)$ K $= 710$ K, må

$$\mathrm{e}^{-t/t_0} = \frac{710}{5000},$$

dvs.

$$t = t_0\ \log\left(\frac{5\,000}{710}\right) = 1.08\cdot 10^{18}\ \mathrm{s} \approx 34.3\ \text{milliarder år}. \tag{38}$$

Kommentarer:

Hvis man tar hensyn til jordas krumning, jfr. kommentaren til forrige punkt, endres tallverdiene noe. Vi finner istedet

$$t_0 = \frac{C_{\text{jernkjerne}} h_0}{4\pi\lambda R_j^2 (1 - h_0/R_j)} = 5.76\cdot 10^{17}\ \mathrm{s}, \tag{39}$$

og $\Delta T(0) = 5\,204$ K, slik at nedkjøling til 1 000 K tar en tid

$$t = t_0\ \log\left(\frac{5\,204}{710}\right) = 1.15\cdot 10^{18}\ \mathrm{s} \approx 36.4\,\text{milliarder år}. \tag{40}$$

Studenter med inngående kjennskap til elektriske kretser vil merke seg analogien med utladning av en kondensator C gjennom en motstand R. Tidskonstanten for dette er gitt som $t_0 = RC$. Vårt system er matematisk sett det samme, bare med den elektriske kapasitansen C erstattet med varmekapasiteten $C_{\text{jernkjerne}}$ og den elektriske motstanden R erstattet med varmeledningsmotstanden

$$R_Q = \frac{1}{4\pi\lambda}\int_0^{h_0} \frac{dh}{(R_j - h)^2} = \frac{h_0}{4\pi\lambda R_j^2\ (1 - h_0/R_j)} \approx \frac{h_0}{4\pi\lambda R_j^2}. \tag{41}$$

Det bør bemerkes at de nedkjølingstidene som vi har funnet er betydelig overdrevet. En beregning av lord Kelvin fra slutten av 1800–tallet skal gitt en nedkjølingstid av størrelsesorden 100 millioner år (altså ca. 300 ganger raskere enn det vi har funnet), mye kortere enn jordas alder på 4.5 milliarder år. Det var derfor et mysterium hvorfor jordas indre fortsatt er så varm som den er. Idag vet vi at det foregår radioaktive prosesser i jordas indre, det er sannsynligvis disse som holder temperaturen oppe.

De fleste løser denne deloppgaven ved å anta at varmestrømmen I_Q er konstant, og lik den som ble brukt i forrige deloppgave. Dette blir feil fordi I_Q avtar ettersom temperaturfallet ΔT avtar. En vesentlig forbedret løsning er derfor å anta en konstant varmestrøm I_Q, men å beregne denne ved et gjennomsnittlig temperaturfall, f.eks. $\Delta T = 2\,500$ K, slik endel kandidater fornuftig nok gjør (men slike fornuftige kandidater burde ikke ha vanskeligheter med å tilegne seg den smule differensialregning som kreves for en fullstendig løsning).

Oppgave 3

En ubåt har sunket til bunns i Barentshavet, og ligger hjelpeløs på 200 m dyp. Båten har to opprinnelig tette rom av volum $V_0 = 40\ \mathrm{m}^3$, som er isolert fra hverandre. I begge er temperaturen $T_0 = 18°$ C, og trykket $p = 1$ atm. Tettheten til sjøvann kan settes til 1020 kg/m^3.

a) Hva er trykket p_1 utenfor ubåten?

Med atmosfæretrykk, $p_0 = 1\ \mathrm{atm} = 101\,325$ Pa, ved havoverflaten bli trykket utenfor ubåten

$$p_1 = p_0 + 1\,020\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3} \cdot 200\ \mathrm{m} \cdot g = 2.103\ \mathrm{MPa} = 20.75\ \mathrm{atm}. \tag{42}$$

Kommentar: Her er den vanligste feilen at man glemmer å legge til atmosfæretrykket.

b) En luke inn til det ene rommet bryter sammen og vannet strømmer inn. Dette skjer så raskt at luften i rommet kan antas å bli presset sammen adiabatisk, helt til trykket i den gjenværende luftlommen er lik trykket utenfor båten. Her, og i alle punktene nedenfor, antas det at ingen luft slipper ut av ubåten. Du kan neglisjere høydeforskjeller inne i ubåten, da disse vil være små i forhold til dybden 200 m.

Hva er temperaturen T_1 i luftlommen etter den adiabatiske sammenpressingen?

Vi bruker adiabatligningen

$$p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma, \tag{43}$$

der man kan sette adiabatkonstanten $\gamma = \frac{7}{5}$ for luft. Her kan man først beregne volumet V_1, og så bruke tilstandsligningen, $pV = N k_B T$, til å finne temperaturen T_1. Hvis vi gjør dette analytisk

$$V_0 = \frac{N k_B T_0}{p_0}, \quad V_1 = \frac{N k_B T_1}{p_1},$$

fås en annen versjon av adiabatligningen

$$p_0^{1-\gamma}\, T_0^\gamma = p_1^{1-\gamma}\, T_1^\gamma. \tag{44}$$

Derav fås

$$T_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-1/\gamma} T_0 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7} T_0 = 692.5\ \mathrm{K} = 419.4\ °\mathrm{C}, \tag{45}$$

utrivelig varmt!

c) Hvor mye arbeid utføres på luften i dette rommet under sammenpressingen?

Fra adiabatligningen følger det at $p(V) = p_0\,(V_0/V)^\gamma$, slik at arbeidet som *utføres* på luften i rommet er gitt ved

$$\begin{aligned} W_{0\to 1} &= -p_0 \int_{V_0}^{V_1} \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma dV = \frac{p_0\, V_0^\gamma}{\gamma - 1}\left(V_1^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}\right) = \frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{\gamma - 1} \\ &= 13.97\ \mathrm{MJ} \end{aligned} \tag{46}$$

En alternativ, mer direkte metode er å bruke at det utførte arbeidet er lik økningen i luftas indre energi,

$$W_{0\to 1} = C_V\ (T_1 - T_0) = \frac{5}{2} N k_B\,(T_1 - T_0) = \frac{5}{2}\,(p_1 V_1 - p_0 V_0) = \frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{\gamma - 1}. \quad (47)$$

Kommentarer:

Noen som har fått numerisk riktig svar kan likevel ha blitt trukket litt, fordi de er upresise med fortegn. Dette kan virke som pirk, men et av de største problemene med termodynamiske prosesser er faktisk å holde styr på fortegn — inkludert definisjon av hvilke størrelser man faktisk regner ut (når elektrisitetsregningen skal betales er det ikke uvesentlig hvem som har levert og hvem som har mottatt energien).

En vanlig feil er at man regner ut pV–arbeidet med et konstant trykk p.

d) Temperaturen i den gjenværende luftlommen synker etterhvert til $T_2 = 4°\mathrm{C}$. Hvilket volum V_2 har luftlommen etter dette?

Fra tilstandsligningen, $pV = Nk_BT$, følger det at

$$V_2 = \frac{Nk_BT_2}{p_2} = \frac{Nk_BT_2}{p_1}$$

Vi setter inn $Nk_B = p_0V_0/T_0$, og får

$$V_2 = \frac{p_0 T_2}{p_1 T_0}\, V_0 = 1.835\ \mathrm{m}^3. \quad (48)$$

Det er mange andre måter å regne ut dette på; ved å gjøre det på denne måten er man uavhengig av om deloppgave **b)** ble gjort riktig (eller i det hele tatt gjort).

e) Temperaturen i det andre rommet har sunket til $T_2 = 4°\mathrm{C}$ før en liten ventil bryter sammen slik at vannet strømmer inn. Dette skjer så langsomt at temperaturen i rommet forblir konstant lik T_2.

Hvilken hastighet v har vannstrålen inn i dette rommet til å begynne med?

Vi bruker Bernoulli's lov,

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p_3}{\rho} + g\cdot(-200\ \mathrm{m}) = \frac{p_0}{\rho}, \quad (49)$$

der $\rho = 1\,020\ \mathrm{kg/m}^3$ er tettheten til sjøvann, $p_0 = 1$ atm er trykket ved havoverflaten, og $p_3 = (T_2/T_0)\,p_0 = (V_2/V_0)\,p_1$ er trykket inne i det andre rommet. Fra dette finner vi

$$v = \sqrt{g\cdot 400\,\mathrm{m} + \frac{2}{\rho}\left(p_0 - \frac{T_2}{T_0}\,p_0\right)} = \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}\left(1 - \frac{V_2}{V_0}\right)} = 62.72\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \quad (50)$$

Kommentar: Her var det ganske mange som tydeligvis ikke hadde peiling på Bernoulli's lov, eller tankegangen bak Bernoulli's lov. De hadde rettferdig nok ikke nubbesjans til å løse denne oppgaven.

f) Anta at vannet strømmer inn gjennom et hull av areal 1 cm^2. Sett opp en differensialligning for hvordan volumet av luften i dette rommet vil endre seg med tiden.

Volumet V i rommet vil minke ettersom det strømmer inn vann. Dette skjer etter formelen

$$\frac{dV}{dt} = -v\,A, \quad (51)$$

der A er arealet av hullet. Innstrømningshastigheten v finner vi fra Bernoulli' lov

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(p_1 - p)} = \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}\left(1 - \frac{V_2}{V}\right)}. \tag{52}$$

Kombinert gir dette differensialligningen

$$\frac{dV}{dt} = -A\sqrt{\frac{2p_1}{\rho}\left(1 - \frac{V_2}{V}\right)}. \tag{53}$$

Denne kan forenkles litt ved å innføre dimensjonsløse variable

$$y = \frac{V}{V_2}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad \text{der } t_0 = \frac{V_2}{Av_0} = \frac{V_2}{A}\sqrt{\frac{\rho}{2p_1}} \approx 286 \text{ s}. \tag{54}$$

Da får vi

$$\frac{dy}{d\tau} = -\sqrt{1 - \frac{1}{y}}, \quad y(0) = \frac{V_0}{V_2} = y_0 \approx 21.8. \tag{55}$$

Kommentar:
Hvis trykket inne i rommet hadde vært null, ville vannet strømmet inn med hastigheten $v_0 = \sqrt{2p_1/\rho} \approx$ 64.2 m/s. Da ville det tatt tiden $t_0 = V_2/Av_0$ å fylle et volum V_2, og tiden $t_1 = (V_0/V_2 - 1)t_0 \approx 5\,944$ s å fylle rommet til bare luftlommen V_2 er igjen.
Ligning (55) er separabel, og kan integreres

$$\sqrt{\frac{y}{y-1}}\,dy = df(y) = -d\tau, \tag{56}$$

der

$$f(y) = \sqrt{y^2 - y} + \frac{1}{2}\log\left(\sqrt{y^2 - y} + y - \frac{1}{2}\right). \tag{57}$$

Dvs. at løsningen kan skrives på implisitt form,

$$f(y_0) - f(y(\tau)) = \tau, \tag{58}$$

og at det mer nøyaktig tar tiden

$$\begin{aligned} t_2 &= [f(y_0) - f(1)]\, t_0 = 6\,720 \text{ s} \\ &= 1 \text{ time } 52 \text{ minutter} \end{aligned} \tag{59}$$

å fylle rommet til trykket er utjevnet. Figuren til høyre viser hvordan volumet av luftlommen avtar ettersom vannet strømmer inn.