Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i SIF4004 FYSIKK for ELEKTRONIKK OG TEKNISK KYBERNETIKK

Onsdag 1. august 2001
09:00–15:00

Eksamen gitt av Kåre Olaussen.

Oppgave 1

Oppgave 2

Oppgave 3

En ubåt har sunket til bunns i Barentshavet, og ligger hjelpeløs på 110 m dyp. Båten har to opprinnelig tette rom av volum $V_0 = 40$ m^3, som er isolert fra hverandre. I begge er temperaturen $T_0 = 18°$ C, og trykket $p = 1$ atm. Tettheten til sjøvann kan settes til 1020 kg/m^3.

a) Hva er trykket p_1 utenfor ubåten?

Med atmosfæretrykk, $p_0 = 1$ atm $= 101\,325$ Pa, ved havoverflaten bli trykket utenfor ubåten

$$p_1 = p_0 + 1\,020\,\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot 110\ \text{m} \cdot g = 1.202\ \text{MPa} = 11.86\ \text{atm}. \tag{1}$$

b) En luke inn til det ene rommet bryter sammen og vannet strømmer inn. Dette skjer så raskt at luften i rommet kan antas å bli presset sammen adiabatisk, helt til trykket i den gjenværende luftlommen er lik trykket utenfor båten. Her, og i alle punktene nedenfor, antas det at ingen luft slipper ut av ubåten. Du kan neglisjere høydeforskjeller inne i ubåten, da disse vil være små i forhold til dybden 110 m.

Hva er temperaturen T_1 i luftlommen etter den adiabatiske sammenpressingen?

Vi bruker adiabatligningen

$$p_0 V_0^\gamma = p_1 V_1^\gamma, \tag{2}$$

der man kan sette adiabatkonstanten $\gamma = \frac{7}{5}$ for luft. Her kan man først beregne volumet V_1, og så bruke tilstandsligningen, $pV = Nk_BT$, til å finne temperaturen T_1. Hvis vi gjør dette analytisk

$$V_0 = \frac{Nk_BT_0}{p_0}, \quad V_1 = \frac{Nk_BT_1}{p_1},$$

fås en annen versjon av adiabatligningen

$$p_0^{1-\gamma}\,T_0^\gamma = p_1^{1-\gamma}\,T_1^\gamma. \tag{3}$$

Derav fås

$$T_1 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{1-1/\gamma} T_0 = \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{2/7} T_0 = 590.3\ \mathrm{K} = 317.1\ ^\circ\mathrm{C}, \tag{4}$$

utrivelig varmt!

c) Hvor mye arbeid utføres på luften i dette rommet under sammenpressingen?

Fra adiabatligningen følger det at $p(V) = p_0\,(V_0/V)^\gamma$, slik at arbeidet som *utføres* på luften i rommet er gitt ved

$$\begin{aligned} W_{0\to1} &= -p_0 \int_{V_0}^{V_1} \left(\frac{V_0}{V}\right)^\gamma dV = \frac{p_0 V_0^\gamma}{\gamma-1}\left(V_1^{1-\gamma} - V_0^{1-\gamma}\right) = \frac{p_1V_1 - p_0V_0}{\gamma-1} \\ &= 10.41\ \mathrm{MJ} \end{aligned} \tag{5}$$

En alternativ, mer direkte metode er å bruke at det utførte arbeidet er lik økningen i luftas indre energi,

$$W_{0\to1} = C_V\ (T_1 - T_0) = \frac{5}{2} N k_B\,(T_1 - T_0) = \frac{5}{2}\,(p_1V_1 - p_0V_0) = \frac{p_1V_1 - p_0V_0}{\gamma-1}. \tag{6}$$

d) Temperaturen i den gjenværende luftlommen synker etterhvert til $T_2 = 4°\mathrm{C}$. Hvilket volum V_2 har luftlommen etter dette?

Fra tilstandsligningen, $pV = Nk_BT$, følger det at

$$V_2 = \frac{Nk_BT_2}{p_2} = \frac{Nk_BT_2}{p_1}$$

Vi setter inn $Nk_B = p_0V_0/T_0$, og får

$$V_2 = \frac{p_0T_2}{p_1T_0}\,V_0 = 3.21\ \mathrm{m}^3. \tag{7}$$

Det er mange andre måter å regne ut dette på; ved å gjøre det på denne måten er man uavhengig av om deloppgave **b)** ble gjort riktig (eller i det hele tatt gjort).

e) Temperaturen i det andre rommet har sunket til $T_2 = 4°\mathrm{C}$ før en liten ventil bryter sammen slik at vannet strømmer inn. Dette skjer så langsomt at temperaturen i rommet forblir konstant lik T_2.

Hvilken hastighet v har vannstrålen inn i dette rommet til å begynne med?

Vi bruker Bernoulli's lov,

$$\frac{1}{2}v^2 + \frac{p_3}{\rho} + g\cdot(-110\ \mathrm{m}) = \frac{p_0}{\rho}, \tag{8}$$

der $\rho = 1\,020\ \mathrm{kg/m^3}$ er tettheten til sjøvann, $p_0 = 1$ atm er trykket ved havoverflaten, og $p_3 = (T_2/T_0)\,p_0 = (V_2/V_0)\,p_1$ er trykket inne i det andre rommet. Fra dette finner vi

$$v = \sqrt{g\cdot 220\,\mathrm{m} + \frac{2}{\rho}\left(p_0 - \frac{T_2}{T_0}\,p_0\right)} = \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}\left(1 - \frac{V_2}{V_0}\right)} = 46.56\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}. \tag{9}$$

f) Anta at vannet strømmer inn gjennom et hull av areal 1 cm^2. Sett opp en differensialligning for hvordan volumet av luften i dette rommet vil endre seg med tiden.

Volumet V i rommet vil minke ettersom det strømmer inn vann. Dette skjer etter formelen

$$\frac{dV}{dt} = -v\,A, \tag{10}$$

der A er arealet av hullet. Innstrømningshastigheten v finner vi fra Bernoulli' lov

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}\,(p_1 - p)} = \sqrt{\frac{2p_1}{\rho}\left(1 - \frac{V_2}{V}\right)}. \tag{11}$$

Kombinert gir dette differensialligningen

$$\frac{dV}{dt} = -A\sqrt{\frac{2p_1}{\rho}\left(1 - \frac{V_2}{V}\right)}. \tag{12}$$