

LØSNINGS FORSLAG EKSAMEN I EMNE SIF4005 FYSIKK

Mandag 6. desember 1999 kl. kl. 09.00 – 14.00.

Oppgave 1.

Ladningsfordelingen er gitt ved:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(r) &= \mathbf{b} && \text{for } r \leq R/2 \\ \mathbf{r}(r) &= 2\mathbf{b}(1 - (r/R)) && \text{for } R/2 \leq r \leq R \\ \mathbf{r}(r) &= 0 && \text{for } r > R \end{aligned}$$

a) Totalladningen er:

$$Q = \iiint \mathbf{r}(r) dV$$

Siden det er sfærisk symmetri, er det hensiktsmessig å bruke kulekoordinater. Volumet dV er da gitt som et kuleskall med tykkelse dr :

$$dV = 4\pi r^2 dr$$

Når Q skal regnes ut, må vi bruke samsvarende uttrykk for $\rho(r)$ og grensene ved integrasjonen:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{r=0}^{\infty} \mathbf{r}(r) 4\pi r^2 dr = \int_{r=0}^{R/2} \mathbf{b} 4\pi r^2 dr + \int_{r=R/2}^R 2\mathbf{b}(1 - \frac{r}{R}) 4\pi r^2 dr \\ &= \mathbf{b} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 + \frac{R}{R/2} \left[2\mathbf{b} \frac{4}{3} \pi r^3 - 2\mathbf{b} \frac{4}{4} \pi \frac{r^4}{R} \right] = \frac{1}{6} \pi \mathbf{b} R^3 + \frac{8}{3} \pi \mathbf{b} R^3 - 2\pi \mathbf{b} R^3 - \frac{1}{3} \pi \mathbf{b} R^3 + \frac{1}{8R} \pi \mathbf{b} R^4 = \frac{5}{8} \pi \mathbf{b} R^3 \end{aligned}$$

Dvs., $\mathbf{b} = \frac{8}{5\pi R^3} Q$

Numerisk verdi: $\mathbf{b} = \frac{8}{5\pi R^3} Q = \frac{8 \cdot 4.5 \cdot 10^{-16} \text{ C}}{5\pi (3.0 \cdot 10^{-9} \text{ m})^3} = 8.49 \cdot 10^9 \text{ C/m}^3$

Andel av totalladning for $r < R/2$ er: $\frac{\mathbf{b} \frac{4}{3} \pi \left(\frac{R}{2}\right)^3}{\frac{5}{8} \pi \mathbf{b} R^3} = \frac{4 \cdot 8}{5 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{4}{15}$

b) Det elektriske feltet finnes ved bruk av Gauss lov. For alle tre områder av r velges en sfærisk Gaussflate konsentrisk med ladingsfordelingen. På grunn av symmetrien i problemstillingen er det elektriske feltet radielt rettet:

$$\vec{E} = E_r \vec{e}_r$$

hvor \vec{e}_r er enhetsvektor i radiell retning. E_r er kun avhengig av avstanden, r . Fluksintegralet over den lukkede, valgte Gaussflate (men vilkårlig r) blir da:

$$\oiint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oiint E_r dA = E_r \oiint dA = 4\pi r^2 E_r$$

Her er det også brukt at normalvektoren til flaten er gitt ved: $d\vec{A} = dA \cdot \vec{e}_r$, slik at prikkproduktet mellom de to enhetsvektorene (i samme retning) blir 1. Trenger å regne ut ladningen som er innesluttet av Gaussflaten for ulike valg av r .

For $r < R/2$: $Q_{inne} = \frac{4}{3} \pi r^3 \mathbf{b}$, innsatt i Gauss lov: $E_r = \frac{\frac{4}{3\epsilon_0} \pi r^3 \mathbf{b}}{4\pi r^2} = \frac{\mathbf{b} r}{3\epsilon_0} = \frac{8Qr}{15\pi \epsilon_0 R^3}$

For $R/2 < r < R$:

$$Q_{inne} = \frac{4}{3} \rho b \left(\frac{R}{2} \right)^3 + \int_{r=R/2}^r 2b \left(1 - \frac{r}{R} \right) 4\rho r^2 dr = \frac{1}{6} \rho b R^3 + 8\rho b \left[\frac{r^3}{3} - \frac{1}{4} \frac{r^4}{R} \right]_{R/2}^r$$

$$= \rho b \left(\frac{1}{6} R^3 + \frac{8}{3} r^3 - 2 \frac{r^4}{R} - \frac{R^3}{3} + \frac{1}{8} R^3 \right) = \rho b \left(\frac{8}{3} r^3 - 2 \frac{r^4}{R} - \frac{1}{24} R^3 \right)$$

Det elektriske feltet:

$$E_r = \frac{Q_{inne}}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{\rho b}{4\pi \epsilon_0 r^2} \left(\frac{8}{3} r^3 - 2 \frac{r^4}{R} - \frac{1}{24} R^3 \right) = \frac{b}{\epsilon_0} \left(\frac{2}{3} r - 2 \frac{r^2}{R} - \frac{1}{96} \frac{R^3}{r^2} \right)$$

$$= \frac{2Q}{5\pi \epsilon_0 R^3 r^2} \left(\frac{8}{3} r^3 - 2 \frac{r^4}{R} - \frac{1}{24} R^3 \right) = \frac{4Qr}{15\pi \epsilon_0 R^3} \left(4 - 3 \frac{r}{R} \right) - \frac{Q}{60\pi \epsilon_0 r^2}$$

For $r > R$: $Q_{inne} = Q$, og det elektriske feltet er: $E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$, dvs på samme form som for punktladning i $r=0$.

Kontinuitet: Grense ved $r=R/2$: Innsetting i E_r for $r > R/2$ gir:

$$E_r(r = R/2) = \frac{4QR}{15\pi \epsilon_0 R^3} = \frac{4Q}{15\pi \epsilon_0 R^2}$$

og samme grense fra uttrykket for $R/2 < r < R$:

$$E_r(r = R/2) = \frac{4QR}{15\pi \epsilon_0 R^3} \left(4 - 3 \frac{R}{2R} \right) - \frac{4Q}{60\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{4Q}{15\pi \epsilon_0 R^2}$$

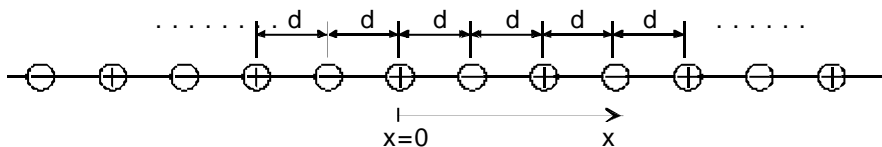
Dvs., E_r er kontinuerlig for $r=R/2$.

Grense for $r=R$: Innsetting i uttrykket for $R/2 < r < R$:

$$E_r(r = R) = \frac{4QR}{15\pi \epsilon_0 R^3} \left(4 - 3 \frac{R}{R} \right) - \frac{Q}{60\pi \epsilon_0 R^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2}$$

som er det samme som en får ved innsetting i uttrykket for $r > R$. E_r er kontinuerlig for $r=R$.

c) En-dimensjonal modell av NaCl krystall. Na^+ og Cl^- ionene er vist med + og - tegn.



Den potensielle energien til et Na-ion med ladning $q = +e$ i et elektrisk potensial er: $U = qV$

I dette tilfellet er det elektriske potensialet satt opp av alle de andre ionene, (punktladningene) og en får fra ulike ioner i krystallmodellen:

Potensiell energi til sentralt Na^+ som skyldes de to nærmeste Cl^- ionene, hver med avstand d fra det sentral Na^+ ionet:

$$U_1 = e \left(\frac{-e}{4\pi \epsilon_0 d} + \frac{-e}{4\pi \epsilon_0 d} \right) = \frac{-2e^2}{4\pi \epsilon_0 d}$$

Potensiell energi til sentralt Na^+ som skyldes de to Na^+ ionene hver med avstand $2d$ fra det sentral Na^+ ionet:

$$U_2 = e \left(\frac{e}{4\pi \epsilon_0 2d} + \frac{e}{4\pi \epsilon_0 2d} \right) = \frac{2e^2}{4\pi \epsilon_0 2d}$$

Potensiell energi til sentralt Na^+ som skyldes de to nest nærmeste Cl^- ionene, hver med avstand $3d$ fra det sentral Na^+ ionet:

$$U_3 = e \left(\frac{-e}{4\pi\epsilon_0 3d} + \frac{-e}{4\pi\epsilon_0 3d} \right) = \frac{-2e^2}{4\pi\epsilon_0 3d}$$

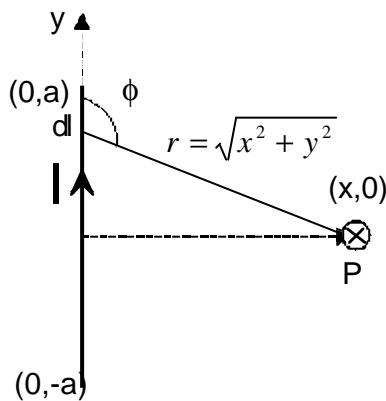
og så videre. Total potensiell energi blir summen av alle disse bidragene:

$$\begin{aligned} U_{\text{tot}} &= U_1 + U_2 + U_3 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} U_i \\ &= \frac{-2e^2}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 2d} + \frac{-2e^2}{4\pi\epsilon_0 3d} + \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 4d} \dots = \frac{-2e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \right) \\ &= \frac{-2e^2}{4\pi\epsilon_0 d} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{i} = \frac{-e^2 \ln 2}{2\pi\epsilon_0 d} \end{aligned}$$

(Ved den siste overgangen er det brukt: $\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots$ med $z = 1$.)

Den totale potensielle energien til kloridionet er det samme som for Na^+ -ionet. Betragtningen avviker fra den for Na^+ ved at vi betrakter en $-e$ ladning i potensialet satt opp av en rekke punktladninger, de som er nærmest (avstand d) har motsatt ladning, de som er nest nærmest ($2d$) har samme ladning, osv. Dette gir samme pot.energi

OPPGAVE 2



a) På grunn av den endelige utstrekningen, er ikke Ampere's lov gyldig i dette tilfellet. Vi må bruke Biot-Savart's lov:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

Vektor $d\vec{l}$ er i samme retning som strømmen, og \vec{e}_r er enhetsvektor fra $d\vec{l}$ til punktet P. Dette gir at retningen på magnetfeltet i punktet P er inn papirplanet:

$$\vec{B} = B \hat{e}_\phi$$

hvor \hat{e}_ϕ er enhetsvektor i θ retning i sylinderkoordinater.

Siden vi nå har bestemt retningen på magnetfeltet, nøyer vi oss med å regne på absoluttverdien i det følgende. I oppgaven er

$dl = dy$, og grensene for integrasjon er fra $y = -a$ til $y = a$. Avstanden r avhenger av x, y som angitt på figuren, og kryssproduktet gir opphav til sinus til den mellomliggende vinkel, $\sin(\phi)$. Den er gitt ved:

$$\sin(\phi) = \sin(\mathbf{p} - \mathbf{f}) = x/r$$

Innsatt i Biot-Savarts lov, gir dette:

$$B = \int dB = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{dy}{r^2} \sin(\phi) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x dy}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x dy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

Integralet løses f.eks. ved å bruke matematisk tabell (Rottman):

$$\int \frac{dx}{X^{3/2}} = \frac{1}{ac - b^2} \frac{ax + b}{\sqrt{X}}; X = ax^2 + 2bx + c$$

Bruk av dette uttrykket gitt i Rottman (NB: Rottman bruker x som variabel, i oppgaven brukes y): $a = 1$, $b = 0$ og $c = x^2$ gir:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-a}^a \frac{x y}{x^2 (x^2 + y^2)^{3/2}} dy = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2a}{x(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{a}{x(x^2 + a^2)^{1/2}}$$

Grensa når $a \rightarrow \infty$ blir:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} |\vec{B}| = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I}{2p} \frac{a}{x(x^2 + a^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{2p} \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{x(1 + (x/a)^2)^{1/2}} = \frac{\mu_0 I}{2px}$$

Bruk av Amperes lov: Velger sirkel med sentrum i lederen og radius $r=x$. \vec{B} og $d\vec{l}$ (NB: Dette er en annen $d\vec{l}$ en den som ble brukt i Biot-Savart's lov over) er da parallelle langs hele integrasjonsstien, og vi får:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi r B = \mu_0 I$$

og løst med hensyn på B får en: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I}{2px}$.

Dette er det samme som grenseverdien i uttrykket over.

- b) Kraften per lengdeenhet F/l mellom to uendelige lange parallelle, strømførende ledere, med strøm I_1 og I_2 og er gitt ved:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2p} \frac{I_1 I_2}{d}$$

hvor d er avstanden mellom lederne. (Denne kan utledes fra de oppgitte formler og følgende:

Leder med strøm I_1 setter opp et magnetfelt \vec{B} gitt ved Amperes lov: $|\vec{B}| = \frac{\mu_0 I_1}{2px}$

Kraften på en strømførende leder med strøm I_2 i like stor avstand $x=d$ gitt ved: $d\vec{F} = I_2 d\vec{l} \times \vec{B}$

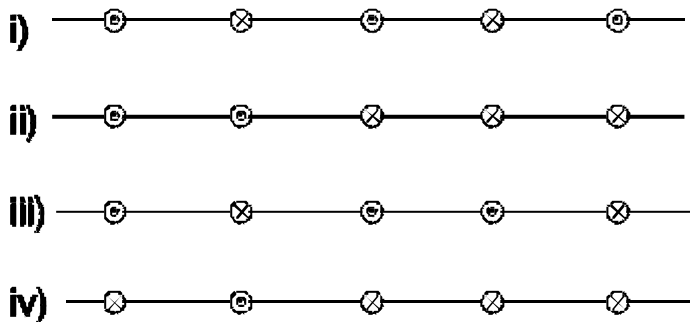
Siden lederne er parallelle, er magnetfeltet konstant, og vi får: $|\vec{F}| = I_2 l |\vec{B}| = I_2 l \frac{\mu_0 I_1}{2pd}$

som er det samme som uttrykket over.)

Retningen på F er tiltrekkende dersom retningene på I_1 og I_2 er den samme, og frastøtende dersom de er motsatt rettet. I oppgaven her er de to strømmene like store, og vi har to avstander, d og $2d$ fra den sentrale lederen til de andre. Innfører størrelsen f_1 som grunnlag for vektorsumming:

$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{2pd} = 2f_1$$

f_1 er dermed kraft per lengdenhet for parallelle ledere med avstand $2d$, og $2f_1$ tilsvarende avstand d .



Ved å regne positiv retning for kreftene som virker på den sentrale lederen mot høyre i figur over, får en følgende totalkraft på arrangementene i). iv):

i) $f_{netto} = -f_1 + 2f_1 - 2f_1 + f_1 = 0$

ii) $f_{netto} = f_1 + 2f_1 + 2f_1 + f_1 = 6f_1$

iii) $f_{netto} = -f_1 + 2f_1 + 2f_1 - f_1 = 2f_1$

iv) $f_{netto} = -f_1 + 2f_1 + 2f_1 + f_1 = 4f_1$

Rangert etter minkende nettokraft (størst nettokraft først): ii), iv), iii) og i).

Alternativt kan en finne fram til denne rangering ved å se på vektorsummen av magnetfeltene satt opp ved den sentrale lederen, og så avlede kraften fra dette. Dette gir samme rangering.

c) Skal vise at den induerte elektromotoriske spenningen ('emsen') i strømsløyfa på grunn av strømmen $I(t)$ i høyspenningsledningen er gitt ved:

$$\mathbf{e} = -\mathbf{m}_0 a f \left[\ln \left(\frac{b+c}{c} \right) \right] I_0 \cos(2\mathbf{p}ft)$$

Den induerte elektromotoriske spenningen er gitt ved Faraday's lov: $\mathbf{e} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$

hvor Φ_B er magnetisk fluks. Nå er $\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A}$

hvor magnetfeltet \vec{B} settes opp av vekselstrømmen i høyspentlederen. Denne finnes ved å sette inn uttrykket for $I(t)$ i uttrykket for magnetfeltet rundt en uendelig lang leder slik det ble bestemt over ved hjelp av Ampere's lov:

$$\vec{B} = \frac{\mathbf{m}_0 I(t)}{2\mathbf{p}r} \hat{e}_\phi = \frac{\mathbf{m}_0 I_0}{2\mathbf{p}r} \sin(2\mathbf{p}ft) \hat{e}_\phi$$

Siden magnetfeltet avhenger av avstanden, må vi integrere. Nå er $d\vec{A} = a dr \hat{n}$ hvor \hat{n} er enhetsnormalvektoren til flaten. Grensene for integrasjon av dr er fra c til $b+c$. Den magnetiske fluksen blir da:

$$\Phi_B = \iint \vec{B} \cdot d\vec{A} = \frac{\mathbf{m}_0 I_0}{2\mathbf{p}} \sin(2\mathbf{p}ft) \int_{r=c}^{b+c} \frac{a dr}{r} = \frac{\mathbf{m}_0 I_0 a}{2\mathbf{p}} \sin(2\mathbf{p}ft) \Big|_c^{b+c} \ln r = \frac{\mathbf{m}_0 I_0 a}{2\mathbf{p}} \sin(2\mathbf{p}ft) \ln \left(\frac{b+c}{c} \right)$$

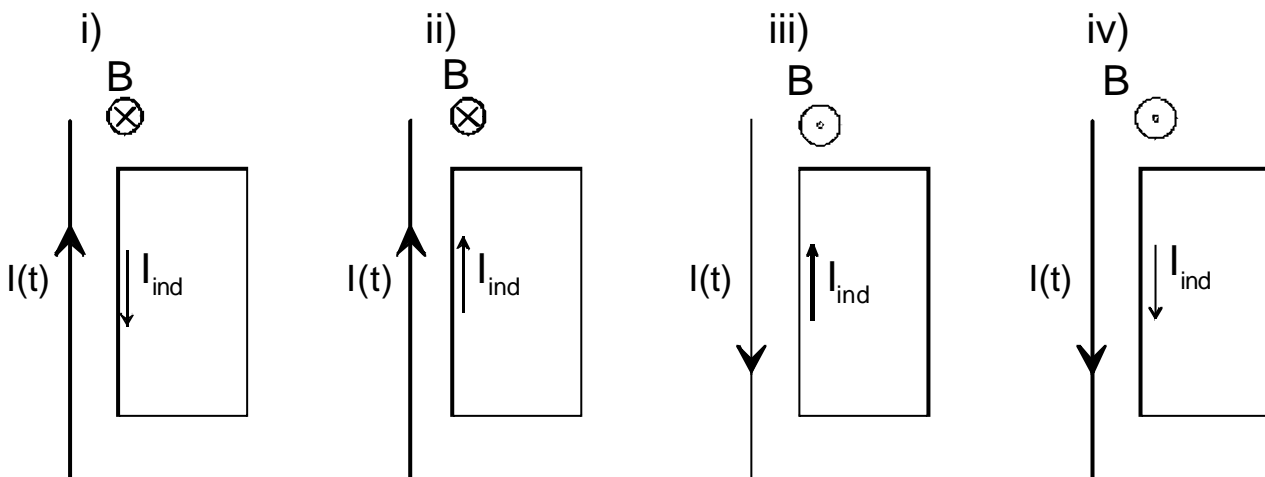
Innsatt i Faraday's lov, oppnås:

$$\mathbf{e} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mathbf{m}_0 I_0 a}{2\mathbf{p}} \ln \left(\frac{b+c}{c} \right) \frac{d \sin(2\mathbf{p}ft)}{dt} = -\mathbf{m}_0 I_0 a f \ln \left(\frac{b+c}{c} \right) \cos(2\mathbf{p}ft), \quad \text{q.e.d.}$$

Amplituden til den induerte 'emsen' ved følgende tallverdier: $I_0=500\text{A}$, $f=50.0\text{ Hz}$, $a=0.20\text{ m}$, $b=0.1\text{m}$, og $c=0.025\text{m}$:

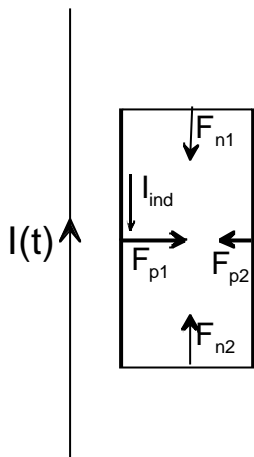
$$\mathbf{e}_{\max} = \left| -\mathbf{m}_0 a f I_0 \ln \left(\frac{b+c}{c} \right) \right| = 4\mathbf{p} \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1} \cdot 0.2\text{m} \cdot 50\text{s}^{-1} \cdot 500\text{A} \cdot \ln \left(\frac{12.5}{2.5} \right) = 1.01 \cdot 10^{-2} \text{ V} = \underline{\underline{10.1\text{mV}}}$$

d) På grunn av at strømmen i høyspentlederen varierer med tiden, blir det satt opp et tids-varierende B-felt som gir opphav til den induerte emsen i strømsløyfa. Retningen på den induerte strømmen i ulike faser av $I(t)$ er som følger:



$I(t)$ øker, retning 'oppover', ($2\pi ft < \pi/2$): I_{ind} setter opp et magnetfelt med motsatt retning av det satt opp av $I(t)$ (B , på fig)	$I(t)$ minker, retning 'oppover', ($\pi/2 < 2\pi ft < \pi$): I_{ind} setter opp et magnetfelt med samme retning som det satt opp av $I(t)$	$ I(t) $ øker, retning 'nedover', ($\pi < 2\pi ft < 3\pi/2$): I_{ind} setter opp et magnetfelt med motsatt retning av det satt opp av $I(t)$ (B , på fig)	$ I(t) $ minker, retning 'nedover', ($3\pi/2 < 2\pi ft < 2\pi$): I_{ind} setter opp et magnetfelt med samme retning av det satt opp av $I(t)$ (B , på fig)
---	--	---	--

Retningen på den induserte strømmen er vist i figuren over. Velger å starte analysen ved situasjonen vist i Fig.



i). Kraftene på høyspentledingen: Kraftene på de delene av strømsløyfa som står normalt på høyspentelederen, F_{n1} og F_{n2} er like store og motsatt rettet, og vil dermed ikke gi noe bidrag til nettokraften. Kraftene på de delene av strømsløyfa som er parallelt med høyspentlederen, F_{p1} og F_{p2} er også motsatt rettet, men kraften F_{p1} er større enn F_{p2} fordi den delen av strømsløyfa ligger nærmere høyspentelederen.

Kraftene F_{p1} og F_{p2} er gitt ved:

$$\vec{dF} = I \vec{dl} \times \vec{B}$$

men siden lederne ligger like langt fra høyspenningslederne er magnetfeltet konstant langs integrasjonsveien. Får da:

$$F_{p1} = I_{ind} aB(r = c)$$

I oppgave 3c) ble 'emsen' og B regnet ut slik at vi får:

$$F_{p1} = \frac{\mu_0 I_0 a^2 f}{R} \ln\left(\frac{b+c}{c}\right) \cos(2\pi ft) - \frac{\mu_0 I_0}{2\pi c} \sin(2\pi ft) = \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^2 f}{2\pi R c} \ln\left(\frac{b+c}{c}\right) \cos(2\pi ft) \sin(2\pi ft)$$

På tilsvarende måte finnes F_{p2} :

$$F_{p2} = \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^2 f}{2\pi R(c+b)} \ln\left(\frac{b+c}{c}\right) \cos(2\pi ft) \sin(2\pi ft)$$

Nettokraften blir

$$\underline{\underline{F_{netto} = F_{p1} - F_{p2} = \frac{\mu_0^2 I_0^2 a^2 f}{4\pi R} \ln\left(\frac{b+c}{c}\right) \left(\frac{b}{c(b+c)}\right) \sin(4\pi ft)}}$$

hvor $\sin(u)\cos(u) = 0.5\sin(2u)$ er blitt brukt.

Dette viser at nettokraften varierer mellom å være frastøtende og tiltrekkende med en frekvens $2f$, dvs. den doble av frekvensen til strømmen. Dette skyldes at I_{ind} som varierer med samme frekvens som $I(t)$, er 'faseforskøvet' $\pi/2$ i forhold til $I(t)$. Resultantkraften F_{netto} i situasjonene over, er dermed: i) frastøtende, ii) tiltrekkende, iii) frastøtende og iv) tiltrekkende. (F_{netto} er null når enten $I(t)$ eller I_{ind} er null).

OPPGAVE 3

a) Ved en forskyvning x fra likevekt, virker fjæren med en kraft $F_f = -kx$ på stolen med eller uten astronaut.

Massen til legemet som beveger seg, m_{tot} , er avhengig av om astronauten er med eller ikke: $m_{tot} = M + m$ med astronaut og $m_{tot} = m$, uten astronaut, hvor M er kroppsmassen til astronauten og m er massen til stolen. Bruk av Newtons 2. lov gir:

$$-kx = m_{tot}a = m_{tot} \frac{d^2x}{dt^2}, \text{ som gir bevegelsesligningen: } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_{tot}}x = 0$$

Denne har løsning av formen: $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \mathbf{j})$

hvor x_0 og ω bestemmes fra startbetingelsene. Her skal bare relasjonen mellom ω og m_{tot} og k brukes. For at den gitte $x(t)$ skal være en løsning, må

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_{tot}}x = -\omega^2 x_0 \cos(\omega t + \mathbf{j}) + \frac{k}{m_{tot}}x_0 \cos(\omega t + \mathbf{j}) = \left(-\omega^2 + \frac{k}{m_{tot}}\right)x_0 \cos(\omega t + \mathbf{j}) = 0$$

Siden $x_0 \neq 0$ tilsvarer at stolen er i ro, og for at ligningen skal være oppfylt for all t , er det $-\omega^2 + k/m_{tot} = 0$

som skal oppfylles. Dette gir: $\omega = \sqrt{k/m_{tot}}$. (Det er tilstrekkelig å starte med denne løsningen for ω).

Nå er sammenhengen mellom vinkelfrekvens og periode T gitt ved $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$. Innsatt i uttrykket for ω får vi: $(2\pi/T)^2 = k/m_{tot}$. Løst mhp. m_{tot} og innsatt med uttrykket for $m_{tot}=M+m$, oppnås:

$$M = \left(\frac{k}{4\pi^2} \right) T^2 - m \quad \text{q.e.d.}$$

For 'Skylab Mission Two', var $k = 605.6$, og $T_{stol} = 1.53015\text{s}$, og $T_{stol+astronaut} = 2.48832\text{s}$. Massen til stolen er da gitt ved:

$$m_{tot} = m = \left(\frac{k}{4\pi^2} \right) T_{stol}^2 = \left(\frac{605.6\text{N/m}}{4\pi^2} \right) (1.53015\text{s})^2 = 35.92\text{kg}$$

og massen til astronauten:

$$M = \left(\frac{k}{4\pi^2} \right) T_{stol+astronaut}^2 - m = \left(\frac{605.6\text{N/m}}{4\pi^2} \right) (2.48832\text{s})^2 - 35.92\text{kg} = 94.98\text{kg} - 35.92\text{kg} = 59.06\text{kg}$$

Massen til astronauten er 59.06 kg bestemt ut fra de eksperimentelt bestemte svingeperiodene når vi antar at friksjon er neglisjerbar.

- b) Kreftene som virker på stolen er nå fjærkrafta, samt friksjonskrafta, $F = -bv$. Bruk av Newtons 2. lov gir nå:

$$-kx - bv = -kx - b \frac{dx}{dt} = m_{tot} a = m_{tot} \frac{d^2 x}{dt^2}$$

Dette gir bevegelsesligninga: $\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{b}{m_{tot}} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m_{tot}} x = 0$

Løsningen er på formen: $x(t) = x_0 e^{-\frac{b}{2m_{tot}}t} \cos(\omega_d t + \mathbf{j})$

hvor x_0 og ϕ bestemmes fra startverdiene. Vinkelfrekvensen ω_d er gitt ved:

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m_{tot}} - \frac{b^2}{4m_{tot}^2}}$$

Her skal vi bestemme m_{tot} fra observert T. Løser derfor m_{tot} fra ω_d :

$$\omega_d^2 = \frac{k}{m_{tot}} - \frac{b^2}{4m_{tot}^2}$$

$$\omega_d^2 m_{tot}^2 - k m_{tot} + b^2/4 = 0$$

Løsning av denne 2. grads lign gir:

$$m_{tot} = \frac{k}{2\omega_d^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{k}{\omega_d^2} \right)^2 - 4 \frac{b^2}{4\omega_d^2}} = \frac{1}{2} \frac{k}{\omega_d^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{b^2 \omega_d^2}{k^2}} \right)$$

Her er det brukt at det kun er + fortegnet som gir den fysiske korrekte løsningen. Dette ses av grensen $b \rightarrow 0$ som skal gi den samme løsning som i oppgave 3a. Den observerte perioden T er i dette tilfellet gitt ved

$\omega_d = 2\pi/T$, slik at m_{tot} kan uttrykkes ved k, b, og T:

$$m_{tot} = \frac{k T^2}{8\pi^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\pi^2 b^2}{k^2 T^2}} \right)$$

Med de observerte T, og $b=140\text{ kg/s}$ er massen til stolen beregnet til:

$$m_{tot} = m = \left(\frac{k}{8p^2} \right) T_{stol}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4p^2 b^2}{k^2 T_{stol}^2}} \right) =$$

$$\left(\frac{605.6 \text{ N/m}}{8p^2} \right) (1.53015 \text{ s})^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4p^2 (140 \text{ kg/s})^2}{(605.6 \text{ N/m} \cdot 1.53015 \text{ s})^2}} \right) = 23.61 \text{ kg}$$

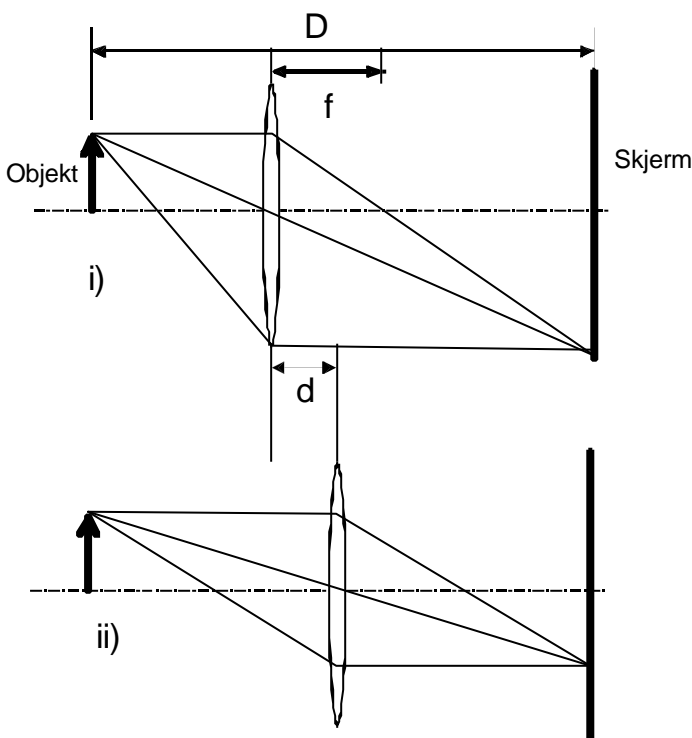
og totalmassen til stol med astronaut:

$$m_{tot} = m + M = \left(\frac{k}{8p^2} \right) T_{stol+astro}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4p^2 b^2}{k^2 T_{stol+astro}^2}} \right) =$$

$$\left(\frac{605.6 \text{ N/m}}{8p^2} \right) (2.48832 \text{ s})^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4p^2 (140 \text{ kg/s})^2}{(605.6 \text{ N/m} \cdot 2.48832 \text{ s})^2}} \right) = 86.05 \text{ kg}$$

Massen til astronauten er M=62.44 kg bestemt ut fra de eksperimentelt bestemte svingeperiodene når vi også tar hensyn til friksjon i analysen.

OPPGAVE 4.



a) Situasjonen er som følger (det er ikke krav til figur ved besvarelse, men det er illustrerende): To posisjonene for en konvergerende linse som gir reelle bilder på observasjons-skjermen er vist i figuren til venstre. Med objektavstand u og bildeavstand v , gjelder for avbildningen:

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

På grunn av at summen av objekt og bildeavstand er gitt ved D :

$$u + v = D$$

får vi en lign. med 1 ukjent (her kan det velges u eller v):

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{D-u} = \frac{1}{f}$$

Omarbeidet:

$$f \cdot (D-u+u) = (D-u) \cdot u$$

som gir 2. gradslikning i u :

$$u^2 - D \cdot u + f \cdot D = 0$$

Denne har løsningen:

$$u = \frac{D}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4Df} .$$

Dvs., vi har to objektavstander:

$$u_1 = \frac{D}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4Df} \text{ og } u_2 = \frac{D}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4Df} .$$

Avstanden d mellom linsa for disse to plasseringene av linsa er:

$$d = u_1 - u_2 = \left(\frac{D}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{D(D-4f)} \right) - \left(\frac{D}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D(D-4f)} \right) = \sqrt{D(D-4f)} \quad \text{q.e.d.}$$

Forstørrelsen, er gitt ved:

$$\frac{y_{\text{bilde}}}{y_{\text{objekt}}} = \frac{v}{u}$$

Forholdet mellom størrelsene på bildene ved de to plasseringene av linsa er gitt ved:

$$\frac{y_{\text{bilde},1}}{y_{\text{bilde},2}} = \frac{y_{\text{bilde},1} / y_{\text{objekt}}}{y_{\text{bilde},2} / y_{\text{objekt}}} = \left(\frac{v_1}{u_1} \right) \left(\frac{u_2}{v_2} \right)$$

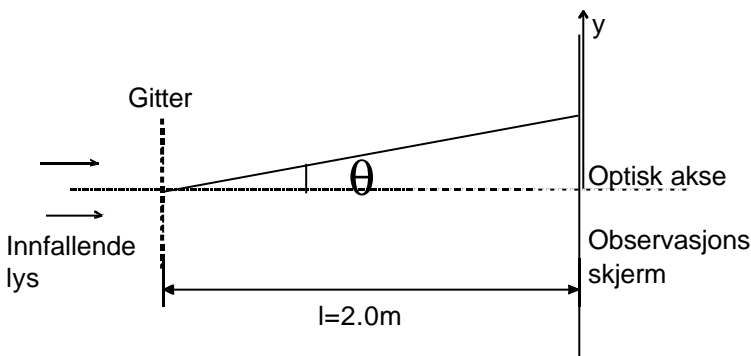
Objektavstandene er gitt over, og de respektive bildeavstandene finnes ved:

$$v_1 = D - u_1 = \frac{D}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4Df} \quad \text{og} \quad v_2 = D - u_2 = \frac{D}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{D^2 - 4Df}$$

Forholdet mellom størrelsene på bildene blir da:

$$\frac{y_{\text{bilde},1}}{y_{\text{bilde},2}} = \left(\frac{v_1}{u_1} \right) \left(\frac{u_2}{v_2} \right) = \left(\frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{D + \sqrt{D^2 - 4Df}} \right) \cdot \left(\frac{D - \sqrt{D^2 - 4Df}}{D + \sqrt{D^2 - 4Df}} \right) = \left(\frac{D - d}{D + d} \right)^2$$

b) Innfører vinkelen θ mellom optisk akse og retningen til et observasjonspunkt y på skjermen:



Betingelsen for hovedmaks i gitteret er at gangveiforskjellen fra lys som kommer fra to nabospalter er et helt antall bølgelengder:

$$d \sin \mathbf{q} = n\mathbf{l}$$

hvor d er spalteavstanden, λ er bølgelengden til lyset, og n er orden ($n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)

Posisjonen y avhenger av θ :

$$y = L \tan \mathbf{q}$$

hvor $L = 2.0$ m er avstand mellom gitteret og observasjonsskjerm. Bruk av interferensbetingelsen gir følgende uttrykk

for posisjoner til interferensmaks (lysstriper) på observasjonsskjermen:

$$y = L \tan \mathbf{q} = L \tan \left(\arcsin \left(\frac{n\mathbf{l}}{d} \right) \right)$$

Innsatt med tallverdier ($d = 10^{-3} \text{ m} / 300 = 3.33 \cdot 10^{-6} \text{ m}$) oppnås følgende posisjoner for interferensmaks:

Posisjoner y (i meter) for interferensmaks for ulike λ og orden n :

n	$\lambda_1 = 655 \text{ nm}$ (rødt)	$\lambda_2 = 486 \text{ nm}$ (blått)	$\lambda_3 = 434 \text{ nm}$ (fiolett).
1	0.4012 (utenfor)	0.29 (utenfor)	0.26 (utenfor)
2	0.8558	0.6098	0.5395
3	1.4618	0.9729	0.8487
4	2.549	1.4361	1.2203
5	-	2.1304	1.7155
6	-	-	-

Innen området y fra 0.5m til 2 m på observasjonsskjermen observeres følgende linjemønster:

Fiolett ($y=0.5395\text{m}$, $n=2$)

Blått ($y=0.6098\text{m}$, $n=2$)

Fiolett ($y=0.8487\text{m}$, $n=3$)

Rødt ($y=0.8558\text{m}$, $n=2$)

Blått ($y=0.9729\text{m}$, $n=3$)

Fiolett ($y=1.2203\text{m}$, $n=4$)

Blått ($y=1.4361\text{m}$, $n=4$)

Rødt ($y=1.4618\text{m}$, $n=3$)

Fiolett ($y=1.7155\text{m}$, $n=5$)