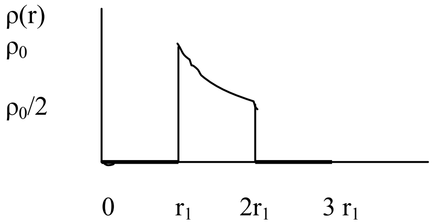
BESVARELSE EKSAMEN SIF4005 FYSIKK
For kjemi og materialteknologi
Onsdag 12. desember 2001

Oppgave 1: Elektrostatikk

a) Den totale ladningen i kula er:

$$\iiint \rho \cdot dV = \int_{r_1}^{r_2} \rho_o \frac{r_1}{r} 4\pi r^2 dr = 4\pi \rho_o r_1 \int_{r_1}^{r_2} r dr = 4\pi \rho_o r_1 \left(\frac{1}{2} \left(r_2{}^2 - r_1{}^2 \right) \right) = 2\pi \frac{Q}{6\pi r_1{}^3} r_1 \left(4r_1{}^2 - r_1{}^2 \right) =$$

$$\frac{Q}{6\pi r_1{}^3} \cdot 6\pi r_1{}^3 = \underline{\underline{Q}}$$



b) Gauss lov for å bestemme det elektriske feltet:

$$\iint E \cdot dA = \frac{Q_{inne}}{\varepsilon_o}$$

I $r<r_1$ $Q_{inne}= 0$ dvs $\underline{E=0}$

II $r_1<r< r_2$

$$Q_{inne} = \iiint \rho \cdot dV = \rho_o r_1 \int_{r_1}^{r} \frac{4\pi r^2 dr}{r} = 2\pi \rho_o r_1 (r^2 - r_1{}^2) = 2\pi \frac{Q \cdot r_1}{6\pi r_1{}^3} (r^2 - r_1{}^2) = \frac{Q}{3r_1{}^2} (r^2 - r_1{}^2)$$

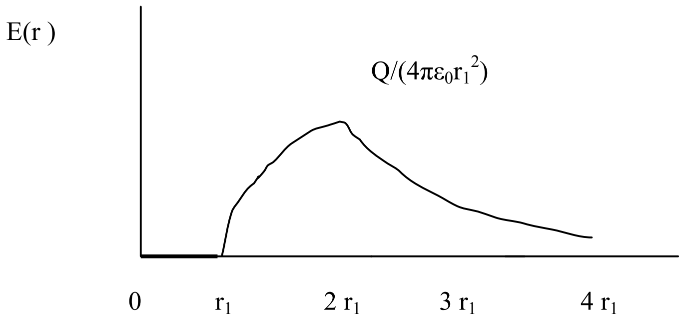
$$\iint E dA = E 4\pi r^2 = \frac{Q_{inne}}{\varepsilon_o}$$

$$E = \frac{Q}{4\pi r^2 \varepsilon_o 3r_1{}^2} (r^2 - r_1{}^2) = \underline{\underline{\frac{Q}{12\pi \varepsilon_o} \left(\frac{1}{r_1{}^2} - \frac{1}{r^2}\right)}}$$

III $r>r_2$

$$\iint E dA = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_O}$$

$$\underline{\underline{E = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_o r^2}}}$$



Sjekker kontinuiteten i $r=r_1$ og $r=r_2$:

$$E(r_1) = 0\,fra..områdeI$$

$$E(r_1) = 0\,fra..områdeII$$

$$E(r_2) = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 r_1^{\,2}}\,fra..områdeII$$

$$E(r_2) = \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 r_1^{\,2}}\,fra..områdeIII$$

c) Elektrisk potensiale.
Velger V(∞) =0 som referanse.

For område III $r>r_2$

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$V(r) - V(\infty) = \int_r^\infty \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left|-\frac{1}{r}\right|_r^\infty = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(-\frac{1}{\infty}+\frac{1}{r}\right)$$

$$V(r) = V(\infty) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r} = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o r}}}$$

For område II $r_1<r<r_2$
Beregner potensialet fra r_2 til $r>r_1$

$$V(r) - V(r_2) = \int_r^{r_2} \frac{Q}{12\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r_1^{\,2}} - \frac{1}{r^2}\right)dr = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_o}\left|\frac{r}{r_1^{\,2}} - \left(-\frac{1}{r}\right)\right|_r^{r_2} = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_o}\left(\frac{r_2 - r}{r_1^{\,2}} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r}\right)$$

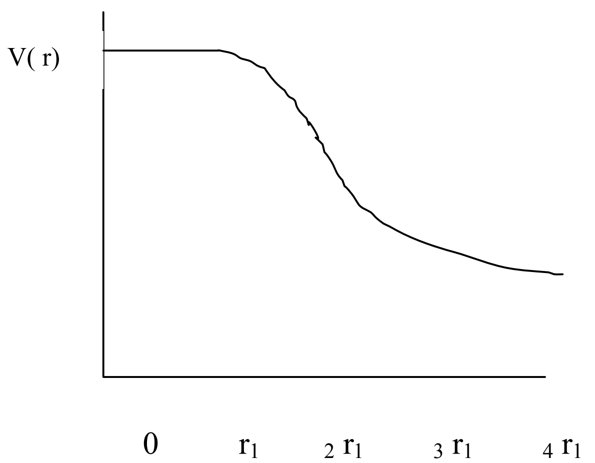
$$V(r) = V(r_2) + \frac{Q}{12\pi\varepsilon_o}\left(\frac{2r_1 - r}{r_1^{\,2}} + \frac{1}{2r_1} - \frac{1}{r}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o 2r_1} + \frac{Q}{12\pi\varepsilon_o}\left(\frac{5}{2r_1} - \frac{r}{r_1^{\,2}} - \frac{1}{r}\right) = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0}\left(\frac{r}{r_1^{\,2}} + \frac{1}{r}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{Q}{12\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4}{r_1} - \frac{r}{r_1^{\,2}} - \frac{1}{r}\right)}}$$

For område I $r<r_1$
Beregner potensialet fra r_1 til $r<r_1$

$$V(r) - V(r_1) = \int_r^{r_1} E\,dr = 0$$

$$V(r) = V(r_1) = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_o}\left(\frac{4}{r_1} - \frac{r_1}{r_1^{\,2}} - \frac{1}{r_1}\right) = \underline{\underline{\frac{Q}{6\pi\varepsilon_0 r_1}}}$$



Sjekker kontinuiteten i $r=r_1$ og $r=r_2$:

$$V(r_1) = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_0 r_1}\ fra..I$$

$$V(r_1) = \frac{Q}{12\pi\varepsilon_0}\left(\frac{4}{r_1} - \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1}\right) = \frac{Q}{6\pi\varepsilon_0 r_1}\ fra..II$$

Oppgave 2: Magnetisme. Spole

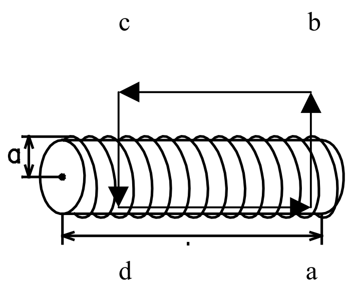
a) Magnetisk felt inne i en spole med lengde l, radius a og N viklinger. Bruker Amperes lov der den lukkede sløyfen er et rektangel med en sidekant langs spolens akse, og en sidekant utenfor spolen.

$$\oint B dl = \mu_o I_{innenfor}$$

$$B\int_a^b dl + B\int_b^c dl + B\int_c^d dl + B\int_d^a dl$$

$$B\int_a^b dl = -B\int_c^d dl$$

$$B\int_b^c dl = 0 ... utenfor .. spolen$$



Integrerer derfor bare langs as lik spolens le

$$B \cdot l = \mu_o NI$$

$$\underline{\underline{B = \frac{\mu_o I \cdot N}{l}}}$$

$$\underline{\underline{\vec{B} = \frac{\mu_o I \cdot N}{l}\vec{i}}}$$

B er uavhengig av avstanden langs spolens diameter.

b) Selvinduktans L

Dersom spolen har N viklinger tett sammen vil samme fluks Φ gå gjennom hver vikling:

$$N\,\Phi = LI$$

$$\Phi = \int B \cdot dA = \frac{\mu_o I \cdot N}{l} \cdot \pi a^2$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} = \underline{\underline{\frac{\mu_o N^2}{l} \cdot \pi a^2 = \mu_0 n^2 \cdot l \pi a^2}}$$

der n=N/l er antall viklinger per lengdeenhet.

Spolens lagrede potensielle energi bestemmes fra effekten spolen mottar. Effekt er lik energi per tidsenhet.

Effekten P spolen mottar ved spenningsfall ε_L:

$$P = -I \cdot \varepsilon_L = I \cdot L \frac{dI}{dt}$$

Energien U lagret i spolen:

$$P = \frac{dU}{dt}$$

$$U = \int P dt = \int LI \frac{dI}{dt} dt = L \int I dI = \underline{\underline{\frac{1}{2} LI^2}}$$

c) Vekselspenningen er gitt ved $v(t)=V_o \sin \omega t$

$$V(t) + V_L - V_R = 0$$

$$V_0 \sin \omega t = L \frac{dI}{dt} + RI$$

Strømmen gjennom motstanden er gitt ved:

$$I = \frac{1}{R} V_0 \sin \omega t = I_0 \sin \omega t$$

<u>Strøm og spenning har samme fase over motstanden</u>

Strømmen gjennom spolen:

$$V_o \sin \omega t = L \frac{dI}{dt}$$

$$I = \frac{V_0}{L} \int \sin \omega t \cdot dt = -\frac{V_0}{L \cdot \omega} \cos \omega t = \underline{I_0 \sin(\omega t - \pi/2)}$$

<u>Strømmen er faseforskjøvet π/2 bak spenningen gjennom spolen.</u>

Strømmen gjennom kretsen:

$$I = \frac{V_{RM}}{R} = \frac{0{,}6V}{20\Omega} = \underline{30 mA}$$

Den induktive reaktansen:

$$X_L = \frac{V_{LM}}{I} = \frac{0{,}8V}{30mA} = \underline{\underline{26{,}7\Omega}}$$

Induktansen L bestemmes fra X_L:

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{26{,}7\Omega}{2\pi 1000Hz} = \underline{\underline{4{,}25mH}}$$

Oppgave 3: Optikk

a) Det intermediære bildet fra L1 faller tilnærmet i fokalpunktet for L1 da objektavstanden er tilnærmet uendelig, dvs bildeavstanden fra L1:

S'=f1

Objektet avbildes på filmen, dvs at bildeavstanden fra L2:

$S_2'=l$

Objektavstanden for det intermediære bildet til L2 er:

$S_2=b-f_1$

Bruker linseformelen for å finne avstanden b mellom linsene:

$$\frac{1}{S_2} + \frac{1}{S_2'} = \frac{1}{f_2}$$
$$\frac{1}{b-f_1} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f_2}$$
$$\frac{1}{b-f_1} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{l} = \frac{l-f_2}{l \cdot f_2}$$
$$b = f_1 + \frac{l \cdot f_2}{l - f_2} = 20cm + \frac{10cm \cdot (-10cm)}{10cm - (-10cm)} = 20cm - 5cm = \underline{\underline{15cm}}$$

Den samlete forstørrelsen er gitt ved:

$$m = -\frac{S'}{S} = (-\frac{S_1'}{S_1}) \cdot (-\frac{S_2'}{S_2}) = \frac{f_1}{a}\frac{l}{b-f_1} = \frac{20cm \cdot 10cm}{a(15-20)cm} = \underline{\underline{-\frac{40}{a}cm}}$$

b) Faseforskjellen for lyset er gitt ved forskjellen i tilbakelagt veilengde:

$$\Delta l = d\sin\alpha + d\sin\theta$$

Faseforskjellen er da:

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta l = \underline{\underline{\frac{2\pi}{\lambda} d(\sin\alpha + \sin\theta)}}$$

Intensitetsfordelingen som funksjon av sinθ for interferensmønsteret finnes ved å bestemme ved hvilke sinθ oppstår henholdsvis interferensmaksimum og minimum.

Kriteriet for interferensmaksimum:

$$\varphi = 2\pi \cdot m$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d(\sin\alpha + \sin\theta) = 2\pi \cdot m$$

$$\underline{\sin\theta = \frac{\lambda m}{d} - \sin\alpha}$$

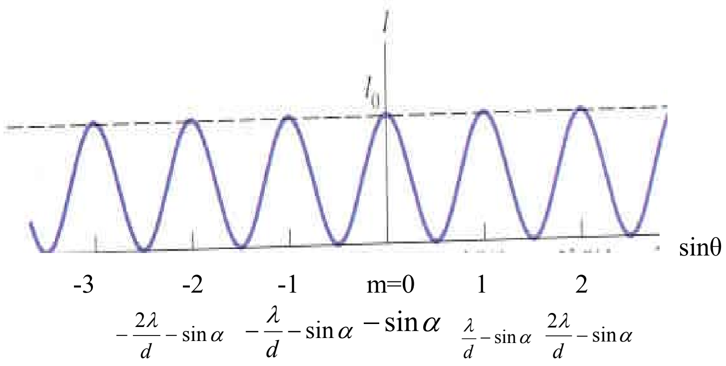
Kriteriet for interferensminimum:

$$\varphi = 2\pi(m + 1/2)$$

$$\frac{2\pi}{\lambda} d(\sin\alpha + \sin\theta) = 2\pi \cdot (m + 1/2)$$

$$\underline{\sin\theta = \frac{\lambda(m + 1/2)}{d} - \sin\alpha}$$

der m=0, ±1, ±2, ±3, osv



c) En elektromagnetisk bølge reflekteres fra to grenseflater. Dersom de to reflekterte bølgene skal gi destruktiv interferens må amplitudene være like store og 180° ute av fase. Amplituden til den reflekterte bølgen fra første grenseflate er gitt ved:

$$E_{r1} = \frac{n_n - n}{n_a + n} E_{i1}$$

Amplituden til den reflekterte bølgen fra den andre grenseflate er gitt ved:

$$E_{r2} = \frac{n - n_b}{n_b + n} E_{i2}$$

Da E_r<<E_i er E_{i1} ≈E_{i2}. Vi har da:

$$\frac{n_a - n}{n_a + n} = \frac{n - n_b}{n_b + n}$$

$$(n_a - n)(n_b + n) = (n - n_b)(n_a + n)$$

$$\underline{\underline{n = \sqrt{n_a n_b}}}$$

De to reflekterte bølgende gir destruktiv interferens dersom gangforskjellen mellom dem gir opphav til en faseforskjell φ=(m+1/2)λ. Gangforskjellen som gir opphav til faseforskjellen er 2 d der d= tykkelsen på antirefleksbelegget.
Når en innfallende bølge treffer et medium med større brytningsindeks blir den reflekterte bølgen faseforskjøvet π. Her er n_a<n<n_b dvs den totale faseforskyvningen på grunn av økende brytningsindeks er 2π. Da det er et helt antall 2π kan vi se bort fra bidraget pga brytningsindeksen. Destruktiv interferens oppnås derfor når tykkelsen på antirefleksbelegget er:

$$2d = (m + \frac{1}{2})\lambda$$

$$\underline{\underline{d = \frac{1}{2}(m + \frac{1}{2})\lambda}}$$

der m=0,1,2,3, osv

Oppgave 4. Mekaniske svingninger

Newtons 2 lov: summen av kreftene som virker på klossen gir klossen akselrasjonen a.
Fjæren utøver en kraft på klossen er gitt ved Hookes lov: F(x)=-kx

Bevegelsen dempes med kraften F_b=-bv

$$-kx - bv = ma$$

$$-kx - b\frac{dx}{dt} = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

$$\underline{\underline{m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0}}$$

$$\underline{\underline{\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha\frac{dx}{dt} + \omega_o{}^2 x = 0}}$$

der α=b/2m og ω_o^2=k/m

En mulig løsning av likningen har formen:

$$x(t) = Ae^{-\alpha \cdot t}\cos(\omega t + \phi)$$

der

$$\omega = \sqrt{\omega_o^{\ 2} - \alpha^2}$$

Betingelsen for denne løsninger er :

$$\omega_o^{\ 2} > \alpha^2$$
$$\underline{\underline{\omega_o > \alpha}}$$
$$\underline{\underline{\frac{k}{m} > (\frac{b}{2m})^2}}$$

b) Startbetingelsene ved t=0 :

$$v(0) = \frac{dx}{dt} = 0$$
$$x(0) = x_0$$
$$E_p(0) = E_0 = \frac{1}{2}kx_0^{\ 2}$$

$$x(0) = Ae^0\cos\phi = A\cos\phi = x_0$$
$$\underline{\underline{A = \frac{x_0}{\cos\phi} = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}\frac{1}{\cos\phi}}}$$

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = A(-\alpha)e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \phi) - Ae^{-\alpha t}\cdot\omega\sin(\omega t + \phi)$$
$$v(0) = -A\alpha\cos\phi - A\omega\sin\phi = 0$$
$$\omega\sin\phi = -\alpha\cos\phi$$
$$\underline{\underline{tg\phi = -\frac{\alpha}{\omega}}}$$

Vis at:

$$A = \sqrt{\frac{2E_o}{k}}\left(\frac{\omega_o}{\omega}\right)$$

$$A = \frac{x_0}{\cos\phi} = x_0\sqrt{1+tg^2\phi} = x_0\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2} = \sqrt{\frac{2E_0}{k}}\sqrt{\frac{\omega^2+\alpha^2}{\omega^2}} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2E_0}{k}}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

d) Bestemmer dempningskoeffisienten b, når utslaget reduseres 1/4 etter 5 hele svingninger.

Utslaget $x(t)=Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t+\phi)$
Ved t=0 $x(0)= Ae^{-0}\cos(\omega 0+\phi)=A\cos\phi$
Vedt=5T $x(5T)= Ae^{-\alpha 5T}\cos(\omega 5T+\phi)$

$$\frac{x(5T)}{x(0)} = \frac{Ae^{-5T}\cos(\frac{2\pi}{T}5T+\phi)}{A\cos\phi} = e^{-\alpha 5T} = \frac{1}{4}$$

$$\alpha = \frac{1}{5T}\ln 4 = \frac{\ln 4}{5}\frac{\omega}{2\pi}$$

$$\omega = 22{,}66\alpha$$

$$\omega^2 = \omega_o{}^2 - \alpha^2$$

$$(22{,}66)^2 = \frac{k}{m} - \alpha^2$$

$$\alpha = 0{,}44s^{-1}$$

$$\alpha = \frac{b}{2m}$$

$$b = 2m\alpha = 2\cdot 10kg\cdot 0{,}44s^{-1} = \underline{\underline{8{,}82Ns/m}}$$