

NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

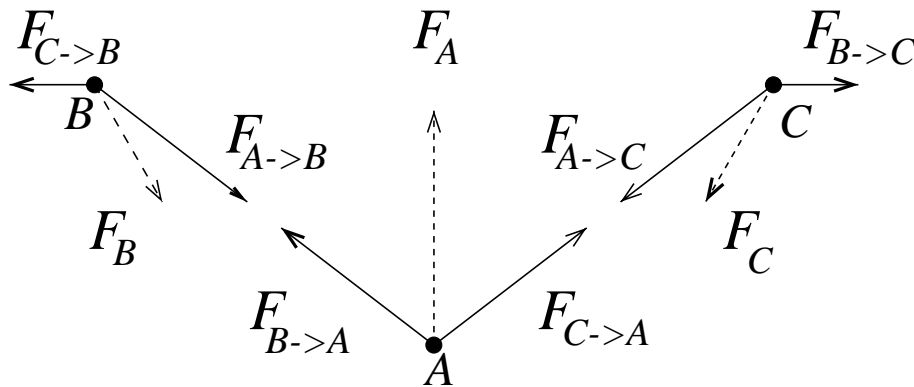
Eksamen gitt av Kåre Olaussen

Løsningsforslag til
Eksamen i fag SIF4007 FYSIKK
for Maskinteknikk, Teknisk design og
Industriell økonomi og teknologiledelse
Onsdag 5. mai 1999
Tid: 09:00—15:00

Dette løsningsforslaget er på 10 sider. Merk at det ikke er skrevet som støtte for sensor og retter, men med tanke på studenter som vil gjennomgå eksamensoppgaven.

Oppgave 1:

a) Figuren under viser en nøyaktig representasjon av alle kreftene i systemet



Det kreves ikke en så nøyaktig figur for full besvarelse, men figuren bør indikere at

- kreftene mellom A og B , og mellom A og C er tiltrekkende (like ladninger tiltrekker hverandre),
- kreftene mellom B og C er frastøtende (motsatte ladninger frastøter hverandre),
- alle parvise krefter har retning langs forbindelseslinjen mellom ladningene,
- $\mathbf{F}_{A \rightarrow B} = -\mathbf{F}_{B \rightarrow A}$, og $\mathbf{F}_{A \rightarrow C} = -\mathbf{F}_{C \rightarrow A}$ har samme lengde (samme avstand mellom ladningene, og samme produkt av ladninger $-2e^2$), større enn $\mathbf{F}_{B \rightarrow C} = -\mathbf{F}_{C \rightarrow B}$ (som har litt større avstand mellom ladningene, men viktigere et mindre produkt av ladninger $-e^2$),
- resultantkraften (nettokraften) på hver ladning er satt sammen kvalitativt korrekt.

Kommentar: Den vanligste feilen her var slurv med resultantkreftene; en kvalitativt korrekt figur skal ha resultantkreftene på B og C i rett kvadrant og resultantkraften på A rettet symmetrisk oppover. Mange har også det relative størrelsesforholdet mellom kreftene feil. På den andre siden er det noen som legger ned svært mye arbeid i figuren, inkludert utregning av kreftene osv. Fra et eksamenstaktisk synspunkt er ikke dette så lurt, fordi dette krever tid og gir liten ekstra uttelling.

- b) Den potensielle energien til systemet *minsker* når vi holder $r_{AB} = r_{AC}$ konstant, men øker vinkelen θ .

Den (negative) potensielle energien mellom ladningene A og B , og mellom ladningene A og C , er uendret fordi avstanden mellom dem er konstant. Den (positive) potensielle energien mellom ladningene B og C avtar fordi avstanden mellom dem blir større.

Alternativt kan man se dette ved å studere kreftene i figuren fra forrige punkt. Anta at vi holder A fast. Da vil kreftene på A ikke bidra til noe arbeid. Ladningen B vil bevege seg langs en sirkelbane med sentrum i A , dvs. i retning normalt på $\mathbf{F}_{A \rightarrow B}$, slik at denne kraften ikke utfører noe arbeid på A . Kraften $\mathbf{F}_{C \rightarrow B}$ har derimot en komponent som virker i samme retning som bevegelsen; den vil derfor bidra til å øke den kinetiske energien til B (eller bidra til friksjonsarbeid hvis bevegelsen bremses). Denne energien må komme fra den potensielle energien til systemet, som derved minsker. Analysen for ladning C er tilsvarende.

Kommentar: Her glemmer mange kraften (eller den potensielle energien) mellom B og C , og konkluderer med uendret potensial. Andre gir riktig svar, men feil begrunnelse. Det har ingenting med saken å gjøre at *kreftene* blir mindre når vi øker avstanden (hvilket også avsløres tydelig i oppgave 1c), det viktige er kraft og vei peker i samme retning eller ikke.

- c) Den potensielle energien til systemet *minsker* når vi holder vinkelen θ konstant, men reduserer r_{AB} og r_{AC} synkront, slik at $r_{AB} = r_{AC}$.

Den negative potensielle energien mellom ladningene A og B , og mellom A og C , blir enda mere negativ. Den positive potensielle energien mellom ladningene B og C blir litt mere positiv, men dette er en mindre effekt fordi (i) laddingsproduktet (e^2) er bare halvparten av de andre parene, (ii) vi har bare ett økende bidrag, mens det er to minkende, og (iii) avstandene mellom dette B og C er hele tiden noe større enn de to andre avstandene.

Alternativt kan man se dette ved å studere kreftene i figuren fra forrige punkt. Anta at vi holder A fast. Da vil kreftene på A ikke bidra til noe arbeid. Ladningen B beveger seg i retning parallellt med kraften $\mathbf{F}_{A \rightarrow B}$ (mens kraften $\mathbf{F}_{C \rightarrow A}$ har en mye mindre komponent rettet mot bevegelsen); den vil derfor bidra til å øke den kinetiske energien til B (eller bidra til friksjonsarbeid hvis bevegelsen bremses). Denne energien må komme fra den potensielle energien til systemet, som derved minsker. Analysen for ladning C er tilsvarende.

Kommentar: Mange som hadde rett konklusjon på oppgave 1b avslører her at de ikke har forstått fysikken likevel. Skuffende mange glemmer også at ulike ladninger tiltrekker hverandre.

- d) Kraften $\mathbf{F}_{B \rightarrow A}$ har lengde $2e^2/(4\pi\epsilon_0 r_{AB}^2)$, og en komponent langs \mathbf{F}_A som er $\cos(\frac{105^\circ}{2})$ av dette. Kraften $\mathbf{F}_{C \rightarrow A}$ bidrar med like mye, så vi får

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_A &= 2 \frac{2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{AB}^2} \cos\left(\frac{105^\circ}{2}\right) = \\ &= 4 \times (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 \times 8.99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \times \left(\frac{1}{2 \cdot 10^{-10} \text{ m}}\right)^2 \times \cos\left(\frac{105\pi}{360}\right) \\ &= 1.4 \cdot 10^{-8} \text{ N} = 14 \text{ nN}. \end{aligned} \quad (1)$$

Kommentar: En grov feil er at kreftene ikke adderes vektorielt. Noen multipliserer med $\sqrt{2}$ istedet for $2 \cos\theta/2$ (ville vært rett for $\theta = 90^\circ$), eller med $2 \sin\theta/2$. Noen ser ikke helt ut til å beherske kalkulatoren sin. Likevel, gledelig mange får rett svar her (hvilket sant å si ikke er særlig mye forlangt — dette burde enhver 3FY-student med ambisjoner om å begynne på NTNU klare).

- e) Den potensielle energien til systemet, målt relativt til situasjonen der alle ladningene er uendelig langt fra hverandre, er

$$U = \frac{-2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{AB}} + \frac{-2e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{AC}} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{BC}} = \frac{-4e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{AB}} + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_{BC}}, \quad (2)$$

når vi bruker at $r_{AB}^2 = r_{AC}^2$. I situasjon i har vi

$$r_{AB}^{(i)} = r_{AC}^{(i)} = 2 \text{ \AA} \text{ og } r_{BC}^{(i)} = 2 r_{AC}^{(i)} \sin\left(\frac{105^\circ}{2}\right) = 3.173 \text{ \AA}. \quad (3)$$

I situasjon f har vi

$$r_{AB}^{(f)} = r_{AC}^{(f)} = 1.8 \text{ \AA} \text{ og } r_{BC}^{(f)} = 1.8 r_{AC}^{(f)} \sin\left(\frac{180^\circ}{2}\right) = 3.6 \text{ \AA}. \quad (4)$$

Vi finner derfor at endringen i potensiell energi er

$$\begin{aligned} \Delta U &= U_i - U_f = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \times 1 \text{ \AA}} \left(\frac{-4}{2} + \frac{1}{3.173} - \frac{-4}{1.8} - \frac{1}{3.6} \right) \\ &= (1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C})^2 \times 8.99 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2} \times \frac{1}{10^{-10} \text{ m}} \times 0.2596 \\ &= 5.975 \cdot 10^{-19} \text{ Nm} = 5.975 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3.734 \text{ eV}. \end{aligned} \quad (5)$$

Kommentar: Dette punktet er vanskelig å få helt rett hvis man ikke husker (eller kan utlede) den potensielle energien for et sett med punktladninger. Noen bruker uttrykket for elektrisk potensial fra en punktladning, men glemmer at det er produktet av ladninger som inngår i den potensielle energien. Mange glemmer å ta med alle bidragene. Noen gjennomfører 'kraft ganger vei' analyse (de fleste med kraften holdt konstant); riktig gjennomført gir dette svar av rett størrelsesorden (og bra uttelling i sensuren).

- f) Vi identifiserer $U_i - U_f$ med $E_i - E_f$, slik at

$$E_i - E_f = \Delta U = hf = \frac{hc}{\lambda} \quad (6)$$

eller

$$\lambda = \frac{hc}{\Delta U} = \frac{6.63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \times 2.998 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{5.975 \cdot 10^{-19} \text{ J}} = 3.327 \cdot 10^{-7} \text{ m} = 332.7 \text{ nm.} \quad (7)$$

Kommentar: Ikke alle husker at $f = c/\lambda$ for lys. Noen er på feil jorde, og bruker formelen for de Broglie bølgelengde til (ikke-relativistiske) materielle partikler.

- g) (I studentenes besvarelser er stikkord som “sentrifugalkrefter” og kvantemekanikk — eller noe tilsvarende — tilstrekkelig forklaring på stabilitet.)

De elektrostatiske kreftene mellom ladningene er slik at de forsøker å gjøre systemet så lite som mulig. Men hvis ladningene er i rotasjon relativt til hverandre vil der også virke “sentrifugalkrefter” som holder dem fra hverandre. Dette hjelper til å stabilisere systemet (slik som vårt planetsystem, som også er styrt av tiltrekkende krefter av presis samme form som Coulomb-kreftene, er relativt stabilt), men det er ikke den fulle sannheten.

I klassisk fysikk vil en ladning som roterer fort stråle ut energi, denne energien tas fra den potensielle energien til ladningene, som derved kommer nærmere og nærmere hverandre.

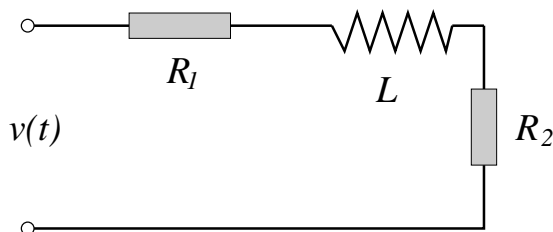
Men pga. kvantemekaniske prinsipper, slik de blant annet uttrykkes ved Heisenbergs usikkerhetsrelasjon, kan ikke et atomært system lokaliseres vilkårlig godt uten at den kinetiske energien samtidig øker over alle grenser. Det er denne effekten som til syvende og sist stabiliserer systemet.

Vi har en kjerne med to protonladninger omgitt av to elektroner, dvs. et Helium-atom (He).

Kommentar: Her var det få gode svar om stabiliteten. Mange henviser til at systemet er ladningsnøytralt, — det er ikke særlig relevant.

Oppgave 2:

Figuren til høyre viser prinsipp-diagrammet for en vekselstrømsmotor (for vårt formål kan vi like gjerne velge å tenke på resistansen R_2 som en varmeovn som vi vil trekke mest mulig effekt ut av). Resistansen R_1 representerer tap i tilførselsledningen. En vekselstrømsmotor vil ofte ha en selvinduktans L med i kretsen. I denne oppgaven skal du først oppgi alle svarene på symbolsk form. For innsetting av tallverdier bruker vi $R_1 = 0.5 \Omega$, $R_2 = 2.0 \Omega$, $L = 10 \text{ mH}$ og $v(t) = 310 \text{ V} \cos(2\pi ft)$, med $f = 50 \text{ Hz}$.



- a) Effektivitet vil være den samme om selvinduktansen L er tilstede eller ikke.

Det går samme strøm gjennom motstandene R_1 og R_2 , så forholdet mellom effektene som omsettes i dem er alltid R_1/R_2 (og det omsettes ingen effekt i selvinduktansen L).

Kommentar: Mange sier korrekt at innkobling av selvinduktansen vil redusere totaleffekten P_{tot} i kretsen, men får ikke med at P_2 reduseres tilsvarende. Endel har ikke lest oppgaven nøye nok, og fått med seg hva det egentlig spørres om.

- b) Man kan bruke den generelle formelen for impedans og fasevinkel for en RLC-krets. Her er det ingen kapasitans tilstede så vi må droppe alle ledd med $1/(\omega C)$. Dessuten ser vi at den totale resistansen i kretsen er $R = R_1 + R_2$. Altså får vi

$$|Z| = \sqrt{(R_1 + R_2)^2 + (\omega L)^2}, \quad \varphi = \arctan\left(\frac{\omega L}{R_1 + R_2}\right). \quad (8)$$

Innsatt tallverdier

$$|Z| = \sqrt{2.5^2 + \pi^2} = 4.015 \Omega, \quad (9)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{\pi}{2.5}\right) = 0.8986 \text{ rad} = 51.5^\circ. \quad (10)$$

Kommentar: Mye riktig på dette punktet (men så er det også snakk om nokså triviell innsetting i oppgitte formler). Likevel: Noen adapterer formelen feil til to motstander ($R_1^2 + R_2^2$ istedet for $(R_1 + R_2)^2$), eller mangel på kapasitans i kretsen ($C \rightarrow 0!$).

- c) Kort og nok: Strømamplituden er $I = 310 \text{ V}/|Z| = 77.2 \text{ A}$, så

$$P_1 = \frac{1}{2}I^2 R_1 = 1490.4 \text{ W}, \quad P_2 = \frac{1}{2}I^2 R_2 = 5961.7 \text{ W}, \quad P_L = 0. \quad (11)$$

I detalj: Det generelle uttrykket for strøm og spenning i kretsen er¹

$$i(t) = I \cos(\omega t - \varphi), \quad (12)$$

$$v(t) = V \cos(\omega t) \quad (13)$$

der $V = 310 \text{ V}$, $\omega = 100\pi$, φ er gitt i ligning (10), og (etter definisjonen på $|Z|$)

$$I = \frac{V}{|Z|} = 77.2 \text{ A}. \quad (14)$$

¹Her skriver vi at strømmen ligger en vinkel φ etter spenningen; det er det samme som å si at spenningen ligger en vinkel φ foran strømmen.

Spenningsfallet over R_1 blir

$$v_1(t) = R_1 i(t) = R_1 I \cos(\omega t - \varphi),$$

så den instantane effekten blir

$$v_1(t) i_1(t) = R_1 I^2 \cos^2(\omega t - \varphi),$$

som etter tidsmidling, $\overline{\cos^2(\omega t - \varphi)} = \frac{1}{2}$, gir P_1 som i ligning (11) over. Beregningen av P_2 går på samme vis. Spenningsfallet over L blir

$$v_L(t) = L \frac{d}{dt} i(t) = -\omega L I \sin(\omega t - \varphi) = \omega L I \cos(\omega t - \varphi + \pi/2).$$

så den instantane effekten blir

$$v_L(t) i_L(t) = -\omega L I^2 \cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi),$$

som etter tidsmidling, $\overline{\cos(\omega t - \varphi) \sin(\omega t - \varphi)} = 0$, gir $P_L = 0$ som i ligning (11) over.

Kommentar: Veldig mange bedøveligheter her! En hyppig feil er at man bruker formler som $P_i = \frac{1}{2} R_i I^2 \cos \varphi$, med φ som funnet i forrige punkt. La meg understreke at i formelen $P = \frac{1}{2} V I \cos \varphi$ for omsatt effekt i en komponent/delkrets skal V være spenningen over komponenten/delkretsen, I strømmen gjennom komponenten/delkretsen og φ fasevinkelen for komponenten/delkretsen. En enda verre feil er å omskrive effektformelen til uttrykk som $P_i = V^2/2R_i$, der V er spenningen over hele seriekretsen.

d) Uten selvinduktans til stede blir strømmen

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2} = 124 \text{ A},$$

som gir

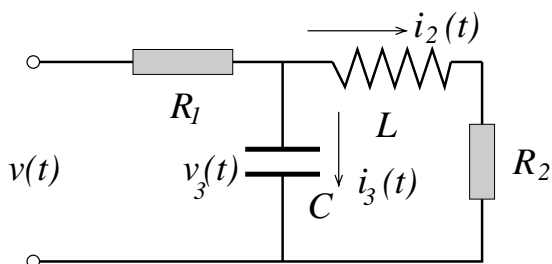
$$P_1 = \frac{1}{2} I^2 R_1 = 3\,844 \text{ W}, \quad P_2 = \frac{1}{2} I^2 R_2 = 15\,376 \text{ W}. \quad (15)$$

Effektiviteten blir, med eller uten induktans,

$$\eta = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 0.8. \quad (16)$$

Kommentar: Mange fortsetter å bruke $\cos \varphi$, med φ funnet i oppgave 2b. Det er i det hele tatt skuffende at så mange ikke greier å analysere en enkel seriekrets med kun to resistanser!

- e) For å øke effekten som omsettes i R_2 kobler vi inn en kapasitans C som vist på figuren til høyre. Vi skulle først se på de to seriekretsene som spenningen $v_3(t)$ ligger over, den ene bestående av induktansen L og resistansen R_2 , den andre av kapasitansen C alene. Vi skriver

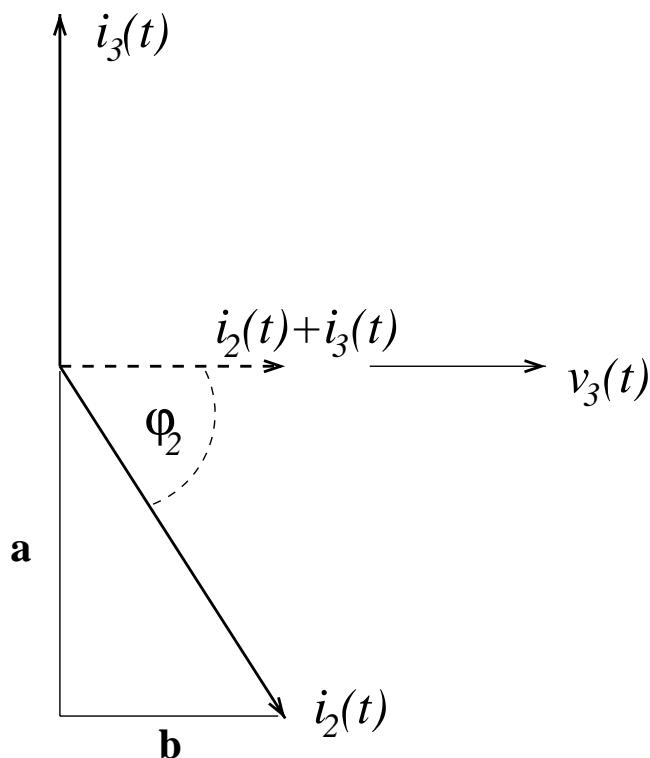


$$v_3(t) = V_3 \cos(\omega t), \quad i_2(t) = I_2 \cos(\omega t - \varphi_2), \quad i_3(t) = I_3 \cos(\omega t - \varphi_3).$$

Da har vi at

$$\begin{aligned} \frac{V_3}{I_2} &= |Z_2| = \sqrt{R_2^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{2^2 + \pi^2} \Omega = 3.724 \Omega, \\ \varphi_2 &= \arctan\left(\frac{\omega L}{R_2}\right) = \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.004 \text{ rad} = 57.518^\circ \\ \frac{V_3}{I_3} &= |Z_3| = \frac{1}{\omega C}, \quad \varphi_3 = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} = -90^\circ. \end{aligned} \quad (17)$$

Vi visualisere disse størrelsene i figuren under



Her er lengden av $i_2(t)$ lik $I_2 = V_3/|Z_2|$, og forholdet mellom kantene **a** og **b** er $\pi : 2$. Lenden av $i_3(t)$ er $\omega C V_3$. Viserne i dette diagrammet roterer alle med vinkelfrekvens $\omega = 100\pi \text{ s}^{-1}$.

Kommentar: Her oppstår det mental blokkering hos mange, som ikke greier å se at det i hovedsak er snakk om analysere to enkle seriekretser. Først den ene og så den andre!

- f) Som vi ser av figuren vil $i_2(t) + i_3(t)$ være parallell med $v_3(t)$ når lengden av $i_3(t)$ er lik sidekanten \mathbf{a} , dvs. når

$$I_3 = \omega C V_3 = \frac{\pi}{\sqrt{2^2 + \pi^2}} I_2 = \frac{\pi}{\sqrt{2^2 + \pi^2}} \frac{V_3}{|Z_2|} = \frac{\pi V_3}{(2^2 + \pi^2) \Omega},$$

der vi har brukt at $|Z_2| = \sqrt{2^2 + \pi^2} \Omega$, se ligning(17). Altså

$$\omega C = 100\pi C \text{ s}^{-1} = \frac{\pi}{(2^2 + \pi^2) \Omega},$$

eller

$$C = \frac{1}{100(2^2 + \pi^2)} \frac{\text{s}}{\Omega} = 721 \mu\text{F}. \quad (18)$$

Kommentar: Hvis man foretrekker å regne med komplekse størrelser går analysen som følger

$$Z_2 = R_2 + j\omega L, \quad Z_3 = \frac{1}{j\omega C}.$$

Parallellkoblingen av disse,

$$Z_{\parallel}^{-1} = Z_2^{-1} + Z_3^{-1} = \frac{1}{R_2 + j\omega L} + j\omega C = \frac{R_2 - j\omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2} + j\omega C,$$

må være reell for at strøm og spenning skal være i fase. Altså må

$$C = \frac{L}{R_2^2 + (\omega L)^2}, \quad (19)$$

som er ligning (18) på symbolsk form. Her bruker mange resonansbetingelsen for en seriekrets

$$\omega L - 1/(\omega C) = 0,$$

som gir svar av rett størrelsesorden (som blir helt rett når $R_2 \rightarrow 0$).

- g) Strømmen gjennom resistansen R_1 er lik $i(t) = i_2(t) + i_3(t)$, som i situasjonen over har lengde

$$I = \frac{2}{\sqrt{2^2 + \pi^2}} I_2 = \frac{2}{\sqrt{2^2 + \pi^2}} \frac{V_3}{|Z_2|} = \frac{2 V_3}{(2^2 + \pi^2) \Omega}, \quad (20)$$

og er i fase med $v_3(t)$. Spenningsfallet over $R_1 = 0.5 \Omega$ blir derved

$$v_1(t) = R_1 I \cos(\omega t) = \frac{2R_1 V_3 \cos(\omega t)}{(2^2 + \pi^2) \Omega} = \frac{v_3(t)}{2^2 + \pi^2}. \quad (21)$$

Nå er

$$v(t) = v_1(t) + v_3(t) = \left[\frac{1}{2^2 + \pi^2} + 1 \right] v_3(t) = \frac{5 + \pi^2}{4 + \pi^2} v_3(t)$$

Altså

$$v_3(t) = \frac{4 + \pi^2}{5 + \pi^2} v(t) = 289.15 \text{ V} \cos(\omega t), \quad (22)$$

$$v_1(t) = \frac{1}{5 + \pi^2} v(t) = 20.85 \text{ V} \cos(\omega t). \quad (23)$$

Kommentar: Fra resultatet av den komplekse analysen over ser vi at systemet er ekvivalent med en seriekobling av resistansen R_1 og resistansen $Z_{\parallel} = R_2 + (\omega L)^2/R_2$. Forholdet mellom spenningene vil være som forholdet mellom resistansene, så spenningsfallene blir

$$v_3(t) = \frac{R_2 + (\omega L)^2/R_2}{R_1 + R_2 + (\omega L)^2/R_2} v(t), \quad (24)$$

$$v_1(t) = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + (\omega L)^2/R_2} v(t). \quad (25)$$

Dette er ligning (22,23) på symbolsk form.

h) Vi finner

$$I_2 = \frac{V_3}{|Z_2|} = 77.64 \text{ A},$$

og tilslutt

$$P_2 = \frac{1}{2} I_2^2 R_2 = 6\,028.2 \text{ W}, \quad (26)$$

som er litt bedre enn uten kapasitans (men ikke tilstrekkelig til at det er verdt investeringen).

Oppgave 3:

a) Togføreren kommer mot lydkilden, og vil derfor møte hver bølgetopp litt oftere enn en som står i ro. Hun hører derfor en *høyere frekvens* en sirenens på 400 Hz.

Kommentar: Her (og i oppgave 3b) bruker mange formelen for Doppler effekt. Ukritisk! Det er ikke så viktige å huske formler, men det er viktig å skjønne hva de betyr. Her var oppgave 3a-b satt opp for å hjelpe kandidatene til å avgjøre hvilke fortegn som skulle brukes i formelen for Doppler effekt i oppgave 3c. Det er skuffende at så mange bruker formelsamlingen istedet for istedet for praktisk fysisk innsikt. Sivilingeniører som praktiserer denne vanen kan fort bli livsfarlige!!

b) Lokomotivet kaster ekko tilbake med samme frekvens som den togføreren hører, *målt på toget*.

En lytter som står stille ved jernbaneskinnen vil derfor høre ekkoet fra en lydkilde som kommer mot ham. Hver ny bølgetopp har litt kortere vei å gå enn den foregående, så de vil ankomme hyppigere enn om lydkilden hadde vært i ro. Altså hører lytteren i ro ved jernbaneskinnen en høyere frekvens enn den togføreren hører.

c) Vi kan ta utgangspunkt i den generelle formelen for Doppler effekt,

$$f_L = \frac{v + v_L}{v + v_S} f_S \quad (27)$$

der f_S er frekvensen til senderen, f_L er frekvensen som lytteren hører, v er lydhastigheten, v_L er hastigheten til lytteren og v_S hastigheten til senderen. De to siste må regnes med fortegn som må bestemmes separat.

Først er togføreren å oppfatte som en lytter i bevegelse, mens senderen er i ro. Togføreren hører derfor en frekvens

$$f_{\text{tog}} = \frac{v + v_{\text{tog}}}{v} \times 400 \text{ Hz}.$$

der v_{tog} skal regnes for positiv når toget kommer imot senderen.

Deretter er togføreren å oppfatte som en sender i bevegelse, mens lytteren er i ro. Lytteren i ro hører derfor en ekko-frekvens

$$f_{\text{ekko}} = \frac{v}{v - v_{\text{tog}}} f_{\text{tog}},$$

der vi har satt inn eksplisitt at v_S må regnes som negativ når senderen kommer imot.

Altså finner man, når toget kommer i mot,

$$f_{\text{ekko}} = \frac{v + v_{\text{tog}}}{v - v_{\text{tog}}} \times 400 \text{ Hz} = \frac{330 + 100\,000/3\,600}{330 - 100\,000/3\,600} \times 400 \text{ Hz} = 474 \text{ Hz}, \quad (28)$$

og når toget kjører i fra,

$$f_{\text{ekko}} = \frac{v - v_{\text{tog}}}{v + v_{\text{tog}}} \times 400 \text{ Hz} = \frac{330 - 100\,000/3\,600}{330 + 100\,000/3\,600} \times 400 \text{ Hz} = 338 \text{ Hz}. \quad (29)$$

Vi har brukt at $1 \text{ km/time} = \frac{1000}{36} \text{ m/s}$.

Sluttkommentar til eksamenssettet:

Sensuren viser at oppgavesettet godt har oppfylt designkriteriet om at (i) studentene skal kunne bestå eksamen med rimelig kunnskap og innsats, og (ii) de som får toppkarakter skal ha grunn til å føle stolthet. (Det kan nesten se ut som at punkt (i) har lyktes i beste laget!)