NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
professor Asle Sudbø, tlf 93403

KONTINUASJONSEKSAMEN I SIF4007 FYSIKK

Tirsdag, 13. august, 2002

09.00-15.00

Tillatte hjelpemidler :	K.Rottman, Matematisk formelsamling
	Godkjent kalkulator
Vekttall :	2.5
Språkform :	Bokmål
Antall sider :	6
Sensurdato :	Mandag 2.september

- Oppgave settet inneholder 3 oppgaver, med til sammen 10 deloppgaver. Hver deloppgave teller likt ved sensur.
- Bak oppgave settet finner du et vedlegg på to sider med formler som det kan, men ikke nødvendigvis vil, være bruk for. Kandidaten må selv tolke symbolene i oppgitte formler.
- Les hver oppgave nøye!

Oppgave 1

I denne oppgaven ser vi på en elektrostatisk sylindersymmetrisk ladningsfordeling $\rho(r, z)$ fordelt inne i en sylinder med radius R. Her er $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sylinderen er sentrert langs z-aksen, og er uendelig lang. Ladningsfordelingen $\rho(r, z)$ er slik at

$$\begin{aligned} \rho(r, z) &= \rho_0 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]; \quad r \leq R, -\infty < z < \infty \\ &= 0; \quad r > R, -\infty < z < \infty \end{aligned}$$

der $\rho_0 > 0$ og n er et positivt heltall.

a) Skisser $\rho(r, z)$, og finn sylinderens totale ladning per lengdeenhet langs z-aksen.

$$Q = \int_0^R \rho(r, z)\ 2\pi r\ dr$$

b) Vis at ladningen $\tilde{Q}(r)$ per lengdeenhet langs z-aksen, samlet innenfor en avstand $r < R$ fra sylinderens sentrum, er gitt ved

$$\tilde{Q}(r) = \pi \rho_0\ r^2\ \left[1 - \frac{2}{n+2}\ \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

c) Bruk Gauss lov til å finne det radielle elektriske feltet perpendikulært på z-aksen utenfor og inne i sylinderen.

d) Finn den minste verdien som r kan ha, hvor feltet har et maksimum, og gi en *kortfattet* fysisk forklaring på hvorfor det er slik (en setning). Skisser feltet for $n = 2$, og angi presis maksimumsverdi på feltet.

Oppgave 2

Vi ser på elektroner i en to-dimensjonal boks med sidekanter L_x og L_y. Kvantetallene som spesifiserer de mulige tilstandene hvert elektron kan være i, er gitt ved $n_x, n_y = 1, 2, 3, ...$ og $m_s = \pm 1$. Tilstandene som elektronene kan være i, er gitt ved

$$\begin{aligned} \Psi(x,y,t) &= \psi(x,y)\, e^{-iEt/\hbar} \\ \psi(x,y) &= \sqrt{\frac{2}{L_x}}\sqrt{\frac{2}{L_y}}\, \sin(\frac{n_x \pi x}{L_x})\, \sin(\frac{n_y \pi y}{L_y}) \end{aligned}$$

Her er $i = \sqrt{-1}$, og E energien som elektronene kan ha i boksen. $\Psi(x,y,t)$ og E finner vi fra Schrødinger-ligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left[\frac{\partial^2 \Psi(x,y,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi(x,y,t)}{\partial y^2}\right] = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,y,t)}{\partial t}$$

a) Formuler Pauli-prinsippet, og vis ved innsetting av $\Psi(x,y,t)$ i Schrødinger ligningen at de mulige energiene til systemet er

$$E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m}\left[\left(\frac{n_x}{L_x}\right)^2 + \left(\frac{n_y}{L_y}\right)^2\right]$$

b) For $L_x = L_y = 3 \cdot 10^{-9} m$, finn antall elektroner i denne boksen, når det man fyller opp energinivåene i henhold til Pauli-prinsippet, og det øverste besatte nivået har energien 0.543 eV ~~0.534eV~~, og det oppgis at øverste nivå er fullt.

c) Vi ønsker nå at *maksimalt* antall elektroner i boksen, med et øverste besatt nivå med samme energi som i oppgave 2b), skal være halvparten av antall elektroner funnet i oppgave 2b). Da må arealet av den to-dimensjonale boksen endres. Anta at boksen endres i størrelse slik at dette kravet oppfylles, til en ny boks som er kvadratisk. Finn energiforskjellen mellom laveste og nest laveste nivå i den nye boksen.

Oppgave 3

Et strømførende linjeelement $d\vec{l}$ som fører en strøm I gir opphav til et magnetfelt $d\vec{B}$ gitt ved

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}$$

hvor $\vec{r}$ er avstandsvektoren *fra* $d\vec{l}$ *til* observasjonspunktet hvor feltet observeres.

Vi ser nå på to plane sirkulære strømførende sløyfer, begge med radius R, som er plassert i en avstand L fra hverandre langs x-aksen. Begge to har flatenormal langs x-aksen og er sentrert på x-aksen. Den ene sløyfen har sentrum i $x = 0$, den andre har sentrum i $x = L$. Sløyfen med sentrum i $x = 0$ fører en strøm med styrke I med retning som gir positivt magnetfelt langs x-aksen, sløyfen i $x = L$ fører en strøm med styrke $8I$ i motsatt retning.

a) Tegn opp systemet med angivelse av strømretninger, og bruk formelen over til å vise at magnetfeltet i et vilkårlig punkt på x-aksen mellom de to sløyfene er gitt ved

$$B(x) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2\pi R^2 I}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \left[1 - C \left(\frac{f(x)}{f(L-x)} \right)^{3/2} \right]$$

og bestem derved C og $f(x)$.

b) Finn alle punktene på x-aksen hvor magnetfeltet er null, og den største verdien R kan ha for at nullpunktene skal finnes. Gi en kort grunn (en setning) for at R ikke må være for stor dersom nullpunkt skal kunne finnes.

c) Hvilken retning må magnetfeltet på x-aksen ha langt unna strømsløyfene? Gi presis grunn for svaret (det er ikke nødvendig å få til oppgave 3a) for å svare på oppgaven).

OPPGITTE FORMLER

$$
\begin{aligned}
|\vec{A} \times \vec{B}| &= |A||B|\sin(\theta) \\
\angle(\vec{A}, \vec{B}) &= \theta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{A} &= A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k} \\
\vec{B} &= B_x\hat{\imath} + B_y\hat{\jmath} + B_z\hat{k} \\
\vec{A} \times \vec{B} &= \hat{\imath}(A_yB_z - B_yA_z) + \hat{\jmath}(A_zB_x - B_zA_x) + \hat{k}(A_xB_y - B_xA_y)
\end{aligned}
$$

$$\int dx\ x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Gauss sin lov

$$\int\int d\vec{S} \cdot \vec{E} = \frac{Q_{\text{tot}}}{\varepsilon_0}$$

Permittiviteten for vakuum:

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$$

Permeabiliteten for vakuum:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} Tm/A$$

Energien i en kapasitans

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Energien i en induktans

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

Elektrisk felt mellom to kondensator plater med flateladning σ og et dielektrisk materiale imellom platene

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \kappa}$$

For små vinkler har vi

$$\tan\theta \approx \sin\theta$$

Plancks konstant

$$\begin{aligned}\hbar &= \frac{h}{2\pi} \\ h &= 6.6262 \cdot 10^{-34} Js\end{aligned}$$

En elektronvolt ($1eV$) er den energien et elektron får ved å aksellereres fra null hastighet over et spenningsfall på $1V$,

$$1eV = 1.602 \cdot 10^{-19} J$$

Elektronets masse

$$m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$$