NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
professor Asle Sudbø, tlf 93403

EKSAMEN I SIF4007 FYSIKK

Fredag 15. august, 2003

09.00-14.00

Tillatte hjelpemidler :	K.Rottman, Matematisk formelsamling
	Godkjent kalkulator
Vekttall :	2.5
Språkform :	Bokmål
Antall sider :	7
Sensurdato :	1.september

- Oppgave settet inneholder 3 oppgaver, med til sammen 10 deloppgaver. Hver deloppgave teller likt ved sensur.
- Bak oppgave settet finner du et vedlegg på tre sider med formler som det kan, men ikke nødvendigvis vil, være bruk for. Kandidaten må tolke symbolene i oppgitte formler.
- Les hver oppgave nøye!

Oppgave 1

a) Fire motstander R_1, R_2, R_3, R_4 skal koples sammen til en ekvivalent motstand R_{eq}. Motstandene R_1 og R_2 koples i parallell, og motstandene R_3 og R_4 koples i parallell. Disse to parallelle koplingene er så koplet i serie. Hva blir den resulterende motstanden R_{eq} uttrykt ved R_1, når $R_2/R_1 = 7/20$, $R_3/R_4 = 7/8$, og $R_3/R_1 = 25/18$?

La motstanden R_1 være et stålrør med indre diameter $d_i = 1.2\text{cm}$, og ytre diameter $d_y = 1.5\text{cm}$, og lengde 0.40m. Hva blir da ekvivalent-resistansen over den parallell koplingen med størst resistans, når resistiviteten til stål er $\rho = 2.0 \cdot 10^{-7}\Omega m$?

b) En uendelig lang massiv sylinder med radius R har en ladning λ_0 pr. lengdeenhet. Denne ladningen er fordelt over sylinder-tverrsnittet slik at ladningstettheten er

$$\rho(r) = A\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^n\right]$$

hvor n er et positivt heltall. Her er r den radielle avstanden fra sylinderens senterakse.

Bestem konstanten A. Vær nøye med å angi korrekt benevning på A.

c) Hva er ladningen pr. lengdeenhet $\lambda(r)$ inne i sylinderen, $r < R$?

Bruk Gauss lov til å finne det elektriske feltet utenfor og inne i sylinderen. La så $n \to \infty$. Hva slags ladningsfordeling inne i sylinderen svarer dette til?

d) En metallsylinder med radius R og senterakse langs z-aksen plasseres i et ytre elektrisk felt som er rettet langs y-aksen. Ladninger i den ledende metallsylinderen blir da forskjøvet slik at det resulterende elektriske potensialet for $r > R$ blir

$$V(r) = A\,y + B\,\frac{\cos(\phi)}{r}$$

der r er radialavstanden fra senteraksen av sylinderen, og ϕ er vinkelen radial avstanden danner med y-aksen, ($y = r\cos(\phi)$).

Hva blir retningen til $\mathbf{E}$ på sylinderens overflate? Skisser feltlinjene i et tversnittsplan til sylinderen.

Hva er så sammenhengen mellom A og B?

Oppgave 2

a) En lang rett luftfylt solenoide har viklinger som er jevnt fordelt, med antall viklinger pr. lengdeenhet langs solenoiden gitt ved n. Det går en stasjonær strøm med styrke I igjennom viklingene. Vis ved hjelp av Amperes lov at magnetfeltet inne i solenoiden er gitt ved

$$B = \mu_0 \, n \, I$$

(Utenfor solenoiden kan feltet regnes som null).

Solenoiden har en selvinduktans L. Beregn denne selvinduktansen når solenoiden har lengde $l = 40\text{cm}$, radius $r = 0.5\text{cm}$, og antall viklinger er $N = 1500$. Permeabiliteten $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{Vs/Am}$.

b) En sirkulær strømsløyfe med radius R, som det går en strøm I igjennom, ligger i (x, y)-planet med senter i origo. På z-aksen setter den opp et magnetfelt som er rettet langs z-aksen. Vis at i vakuum blir størrelsen av dette magnetfeltet i et punkt på z-aksen et uttrykk av formen

$$B = B(z) = \frac{\Gamma}{r^{2\eta}} \, I$$

der $r^2 = z^2 + R^2$. Bestem derved koeffisienten Γ og eksponenten η.

c) En vekselstrømskrets under en påtrykt spenning $V(t) = V_0 \cos(\omega t)$ består av en motstand R seriekoplet med en induktans L, og denne seriekoplingen er parallellkoplet med en kapasitans C. V_0 er reell, ω er vinkelfrekvensen til påtrykt spenning, t er tiden. Finn den vinkelfrekvensen ω uttrykt ved R, C, L som er slik at resulterende strøm $I(t)$ og påtrykt spenning $V(t)$ for denne kretsen ikke er faseforskjøvet i forhold til hverandre. Finn den største verdien på R, uttrykt ved L og C, som gjør at null faseforskyvning overhodet er mulig.

Oppgave 3

Karbon nanorør (rør med typisk utstrekning av størrelsesorden 10^{-9}m) er potensielt viktige i energiteknologi som lagringsmedium for hydrogen. Rørene kan lages av todimensjonale lag av grafitt (en form for rent karbon) som foldes sammen til en sylinder. De kan være hule (kun ett grafittlag foldes til en sylinder) eller de kan være fylte (mange grafittlag lagt oppå hverandre) foldet sammen til en sylinder. I denne oppgaven skal vi se på elektronbevegelse i slike rør i en enkel tilnærmelse.

Vi ser derfor på et elektron med masse m som kan bevege seg inne i en sylinder. Sylinderen har harde yttervegger som elektronet ikke kan trenge inn i overhodet. Sylinderen har senterakse langs z-aksen, radius R, og lengde L. Schrödinger ligningen for problemet er gitt ved

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(r,\theta,z) &= E\Psi(r,\theta,z) \\ \Psi(r,\theta,z) &= R_N(r)\, e^{iN\theta}\sin(Kz) \end{aligned}$$

Her er (r,θ,z) sylinder koordinater, hvor r er radiell avstand fra sylinderens senter akse, θ er vinkelen i forhold til x-aksen ($x = r\cos(\theta)$), og z er koordinaten langs sylinder aksen. Vi har $0 \le r \le R$, $0 \le \theta \le 2\pi$, $0 \le z \le L$.

a) Bestem de mulige verdiene på N og K. (Dreieimpulsen for elektronet rundt z aksen øker med $|N|$). Finn også energien assosiert med bevegelsen på et konsentrisk sylinderplan inne i sylinderen.

b) Vis ved innsetting av $\Psi(r,\theta,z)$ i Schrødinger ligningen at R_N er løsning av ligningen

$$\frac{d^2R_N}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR_N}{dr} + (\beta^2 - \frac{N^2}{r^2})R_N = 0$$

Bestem derved β uttrykt ved $E, \hbar, m, K$. For den tilstanden som har minst mulig dreiempuls rundt z-aksen, har vi at de to laveste mulige verdiene på βR er gitt ved 2.404 og 5.520. Finn dermed de to laveste energinivåene til dette systemet når $L = 25R$, og $L = 250 \cdot 10^{-9}$m.

c) Anta av vi har et *hult* sylindrisk formet karbon nanorør med radius R og lengde $L = 25R$. Røret tenker vi oss fremstilt av ett eneste todimensjonalt grafittlag foldet til en sylinder. Hvilken av de to kinetiske energiene som ble regnet ut i Oppgave 3 **a)** og 3 **b)** er det riktigst å bruke for elektronets kinetiske energi for dette systemet? Begrunn svaret. (Svaret krever *ikke* at man har funnet eksplisitte uttrykk for energiene i de to tilfellene.)

OPPGITTE FORMLER

Nyttige formler til Oppgave 1.

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} &= \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad (\text{Gauss}' \quad \text{lov}) \\
\mathbf{E} &= -\nabla V \\
\nabla V &= \frac{\partial V}{\partial r}\,\hat{e}_r + \frac{1}{r}\,\frac{\partial V}{\partial \phi}\,\hat{e}_\phi + \frac{\partial V}{\partial z}\,\hat{e}_z
\end{aligned}$$

der $\hat{e}_r, \hat{e}_z$ er enhetsvektorer henholdsvis i radial retningn og langs sylinder-aksen. $\hat{e}_\phi$ er enhetsvektoren som står normalt p de to andre enhetsvektorene (azimuthal retningen).

Resistanser i serie:

$$R_{\text{eq}} = \sum_i R_i$$

Resistanser i parallell:

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{R_i}$$

$$R = \rho\ \frac{L}{A}$$

Når en funksjon $f(r, \phi)$ av to variable skal integreres over et todimensjonal område i polarkoordinater, blir dette integralet på formen

$$\int d\phi \int dr\ r\ f(r, \phi)$$

Nyttige formler til Oppgave 2

$$\begin{aligned}
\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} &= \mu_0 I_c \quad (\text{Ampere's} \quad \text{lov}). \\
\mathbf{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{d\mathbf{l} \times \hat{\mathbf{r}}}{r^2}; \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r} (\text{Biot} - \text{Savart's} \quad \text{lov}) \\
\Phi &= LI, \Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{A}
\end{aligned}$$

Impedanser i serie:

$$Z_{\text{eq}} = \sum_i Z_i$$

Impedanser i parallell:

$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \sum_i \frac{1}{Z_i}$$

For resistanser, kapasitanser, og induktanser gjelder

$$Z_R = R; \quad Z_L = i\omega L; \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C}$$

Generalisert Ohm's lov: $V = ZI$. Komplekse tall: $Z = |Z|\, e^{i\phi}$, $\phi = \tan^{-1}(\text{Im(Z)}/\text{Re(Z)})$, $|Z| = \sqrt{(\text{Re(Z)})^2 + (\text{Im(Z)})^2}$. Her er Re(Z) realdelen til Z, og Im(Z) er imaginærdelen til Z.

Nyttige formler til Oppgave 3

I sylinder koordinater har vi

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

For en funksjon $f(r,\theta,z) = J(r)\Theta(\theta)Z(z)$ i sylinder koordinater, har vi at

$$\nabla^2 f(r,\theta,z) = \left(\frac{d^2J}{dr^2}\right)\Theta(\theta)Z(z) + \left(\frac{1}{r}\frac{dJ}{dr}\right)\Theta(\theta)Z(z) + \left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}\right)J(r)Z(z) + \left(\frac{d^2Z}{dz^2}\right)J(r)\Theta(\theta)$$

Øvrige nyttige formler og numeriske konstanter

$$\begin{aligned}
i &= \sqrt{-1} \\
e^{\imath\theta} &= \cos(\theta) + i\sin(\theta) \\
e^{-\imath\theta} &= \cos(\theta) - i\sin(\theta) \\
e^{i\pi/2} &= i \\
e^{i\pi} &= -1 \\
\text{Im}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}] &= \sin\theta \\
\text{Re}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}] &= \cos\theta
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d\sin(ax)}{dx} &= a\cos(ax) \\
\frac{d\cos(ax)}{dx} &= -a\sin(ax)
\end{aligned}$$

$$\int dx\; x^n = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

Permittiviteten for vakuum:

$$\varepsilon_0 = 8.8542 \cdot 10^{-12} C^2/Nm^2$$

Energien i en kapasitans

$$U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}$$

Energien i en induktans

$$U = \frac{1}{2}LI^2$$

Elektrisk felt mellom to kondensator plater med flateladning σ og et dielektrisk materiale imellom platene

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0 \kappa}$$

For små vinkler har vi

$$\tan\theta \approx \sin\theta$$

Plancks konstant

$$\begin{aligned} \hbar &= \frac{h}{2\pi} \\ h &= 6.6262 \cdot 10^{-34} Js \end{aligned}$$

En elektronvolt $(1eV)$ er den energien et elektron får ved å aksellereres fra null hastighet over et spenningsfall på $1V$,

$$1eV = 1.602 \cdot 10^{-19} J$$

Elektronets masse

$$m = 9.1 \cdot 10^{-31} kg$$