Kontinuasjonseksamen i fag
SIF4012, Fysikk 2, 2/8 – 00.

Forslag til løsning.

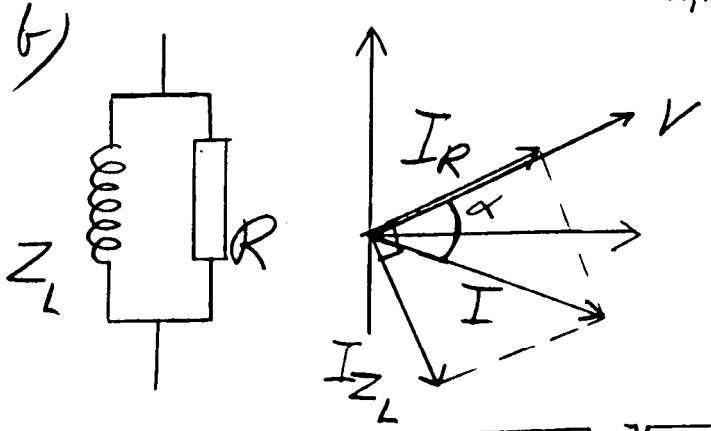
Oppgave 1.

a) Vinkelfrekvensen er $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot 3400\,s^{-1} = \underline{2{,}14 \cdot 10^4\,s^{-1}}$

Med dette finner en:

		Impedans	Fasevinkel
Motstanden:	$Z = R =$	$\underline{\underline{8{,}0\,\Omega}}$	$\underline{\underline{\alpha = 0}}$
Induktansen:	$Z = \omega L = 2{,}14 \cdot 10^4 \cdot 0{,}45 \cdot 10^{-3}\,\Omega =$	$\underline{\underline{9{,}6\,\Omega}}$	$\alpha = \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{90^\circ}}$
Kapasitansen:	$Z = \frac{1}{\omega C} = \frac{1\,\Omega}{2{,}14 \cdot 10^4 \cdot 0{,}24 \cdot 10^{-9}} =$	$\underline{\underline{1{,}95 \cdot 10^5\,\Omega}}$	$\alpha = -\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{-90^\circ}}$

b)



En har strømmene

$$I_R = \frac{1}{R} V$$

$$I_{Z_L} = \frac{1}{X} V$$

Resulterende strøm blir da

$$I = \sqrt{I_R^2 + I_{Z_L}^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\frac{1}{X}\right)^2}\, V = \frac{1}{Z} V$$

Impedansen blir følgelig

$$Z = \left(\sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X^2}}\right)^{-1} = \frac{RX}{\sqrt{R^2 + X^2}} = \frac{3{,}0 \cdot 4{,}0\,\Omega}{\sqrt{3{,}0^2 + 4{,}0^2}} = \underline{\underline{2{,}4\,\Omega}}$$

Fasevinkel: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{I_{Z_L}}{I_R} = \frac{1/X}{1/R} = \frac{R}{X} = \frac{3}{4} = \underline{0{,}75}$

$$\alpha = \underline{\underline{36{,}9^\circ}}$$

Alternativt med komplekse tall:

Parallellkopling: $\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_L} \Rightarrow Z = \frac{RZ_L}{R + Z_L} =$

$$\frac{RiX}{R + iX} = \frac{RX}{X - iR} = |Z| e^{i\alpha}, \text{ dvs. } |Z| = \frac{RX}{(R^2 + X^2)^{1/2}}, \operatorname{tg}\alpha = \frac{R}{X}.$$

Oppgave 2.

a) For store avstander z vil ladningen på tråden bli som en punktladning med tilhørende potensial. Med lengde a blir ladningen på tråden

$$Q = \underline{\underline{a\lambda}}$$

slik at for store avstander r ($\to \infty$) blir potensialet

$$V(z,\rho) = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r}}}$$

For store avstander blir det elektriske feltet også som for punktladning ($\vec{E} = -\nabla V = -\partial V/\partial r\ \hat{e}_r$)

$$E = \underline{\underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}}}$$

b) Et trådstykke med lengde dz_0 har ladning $dq = \lambda\, dz_0$. Med posisjon $z = z_0$ er avstanden til punktet (z,ρ)

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z-z_0)^2}$$

Bidraget til potensialet fra ladningen dq blir derfor

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$$

Det resulterende potensialet blir

$$V = V(z,\rho) = \int dV = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^a \frac{dz_0}{\sqrt{\rho^2+(z-z_0)^2}} =$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-z}^{a-z}\frac{du}{\sqrt{\rho^2+u^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\Big|_{-z}^{a-z} \ln\left[u+\sqrt{\rho^2+u^2}\right] =$$

$$\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left[\ln\left(a-z+\sqrt{\rho^2+(a-z)^2}\right)-\ln\left(-z+\sqrt{\rho^2+z^2}\right)\right]$$

når en setter $u = z_0 - z$, $du = dz_0$. (Ved å sette $u = z - z_0$ eller benytte det andre svaret på opprinnelige integralet finnes det alternative svaret direkte. Likheten av de 2 uttrykkene sees enkelt ved at $\left(\sqrt{c^2+u^2}+u\right)\left(\sqrt{c^2+u^2}-u\right) = c^2$.)

De søkte konstantene blir altså:

$$K = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}, \quad c_1 = a \quad \text{og} \quad c_2 = 0$$

c/ For $z > a$ må en benytte det andre uttrykket for $V(z,\rho)$ for å unngå $\ln(0) - \ln(0)$ når $\rho = 0$. En finner

$$V(z,0) = K\left[-\ln 2(z-a) + \ln(2z)\right] = K\left[\ln z - \ln(z-a)\right]$$

Det elektriske feltet for $z > a$ $(\rho = 0)$ blir dermed

$$E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = K\left(-\frac{1}{z} + \frac{1}{z-a}\right) = K\frac{a}{z(z-a)}$$

Oppgave 3.

a/ Den magnetiske fluksen gjennom vøret er gitt ved (N=1)

$$\phi_2 = \int \vec{B}\, d\vec{A} = BAN = B\frac{\pi}{4}d^2 = \mu_0 n I_1 \frac{\pi}{4}d^2 = M I_1$$

Den gjensidige induktansen blir følgelig

$$M = n\mu_0 \frac{\pi}{4}d^2 = \mu_0 \frac{\pi}{4}d^2 \frac{N_1}{L_1} = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Vs}{Am}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot(0{,}01m)^2 \cdot \frac{300}{0{,}25m}$$

$$= 1{,}18 \cdot 10^{-9}\frac{Vs}{A} = \underline{\underline{1{,}18 \cdot 10^{-7} H}}$$

Magnetfelt generert av strøm i vøret

$$B = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{1}{L} I$$

Tilhørende fluks (N=1)

$$\phi_m = BA \cdot N = B \cdot \frac{\pi}{4}d^2 = \mu_0 \frac{1}{L}\frac{\pi}{4}d^2 I = L I$$

Selvinduktansen blir

$$L = \mu_0 \frac{\pi}{4}d^2 \frac{1}{L} = 4\pi \cdot 10^{-7}\frac{Vs}{m}\cdot\frac{\pi}{4}(0{,}01m)^2 \cdot \frac{1}{0{,}1m}$$

$$= \underline{\underline{0{,}987 \cdot 10^{-9} H}} \; (\approx 10^{-9} H)$$

b/ Magnetfeltet ligger parallelt med jerntråden og da kan en benytte grensebetingelsen $H_{1t} = H_{2t}$ for tangensialkomponenten. Vår så

I luft: $B = \mu_0 H_{1t} = \mu_0 H$

I jern: $B_s = \mu_r \mu_0 H_{2t} = \mu_r \mu_0 H$

Følgelig: $B_s = \mu_r B$

Arealet av jerntråden er: $A_s = \frac{\pi}{4} d_s^2$

Restrende areal i røret: $A_r = A - A_s = \frac{\pi}{4}(d^2 - d_s^2)$

Fluks med jerntråd i røret:

$$\Phi_{s2} = B A_r + B_s A_s = B(A - A_s) + \mu_r B A_s$$

$$= BA + (\mu_r - 1) A_s B = \left(1 + (\mu_r - 1)\frac{A_s}{A}\right) B$$

$$= \left(1 + (\mu_r - 1)\left(\frac{d_s}{d}\right)^2\right) \Phi_2$$

Gjensidig induktans blir følgelig

$$M_s = \underline{\underline{\left(1 + (\mu_r - 1)\left(\frac{d_s}{d}\right)^2\right) M}}$$

Tilsvarende blir nå selvinduktansen

$$L_s = \underline{\underline{\left(1 + (\mu_r - 1)\left(\frac{d_s}{d}\right)^2\right) L}}$$

c) Som strømkretsen blir røret en motstand med lengde $s = \pi d$ (omkretsen av røret) og bredde l. Tverrsnittet av lederen er $A = bl$ slik at motstanden blir

$$R = \rho \frac{s}{A} = \rho \frac{\pi d}{bl} = 1{,}7 \cdot 10^{-8}\,\Omega m \, \frac{\pi \cdot 0{,}01\,m}{5 \cdot 10^{-4}\,m \cdot 0{,}1\,m}$$

$$= \underline{\underline{1{,}07 \cdot 10^{-5}\,\Omega}}$$

d/ Fluksen i røret er som funnet foran:

$$\phi_m = \phi_{m2} = \mu_0 n \frac{\pi}{4} d^2 I_1 = M I_1 = M I_{1,0} \sin \omega t$$

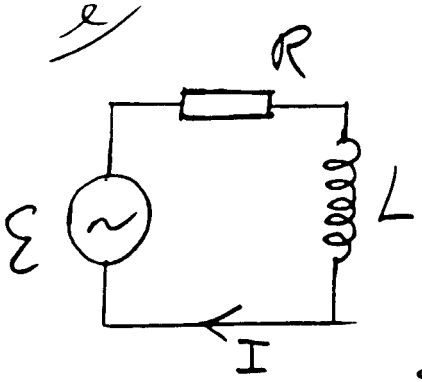
Indusert elektromotorisk spenning

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi_m}{dt} = \underline{\underline{-\omega M I_{0,1} \cos \omega t}}$$

På grunn av symmetrien er det elektriske feltet konstant rundt røret (og tangensielt til dette). Følgelig har en $\mathcal{E} = \oint \vec{E}\, d\vec{s} = E \cdot \pi d$ og dermed

$$\underline{\underline{E = \frac{\mathcal{E}}{\pi d}}} \left(= \frac{-\omega \mu_0 \frac{\pi}{4} d^2 \frac{N_1}{L} I_{1,0} \cos \omega t}{\pi d} = \underline{\underline{-\frac{1}{4} \omega \mu_0 d \frac{N_1}{L} I_{1,0} \cos \omega t}} \right)$$

e/



Spenning over motstanden: $V_R = RI$

Spenning over spolen: $V_L = L \frac{dI}{dt}$

Spenning rundt kretsen: $V_R + V_L = \mathcal{E}$

Den resulterende differensiallikningen blir følgelig

$$\underline{\underline{L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E}}}$$