Løsningsforslag

Kontinuasjonseksamen 1999
SIF4018 Matematisk fysikk

Oppgave 1

Vi har

$$\begin{aligned}\int x^{-1}J_1(x)\,dx &= -\int x^1 J_1(x)\frac{d}{dx}x^{-1}\,dx \\ &= -x^1J_1(x)x^{-1} + \int x^{-1}\frac{d}{dx}x^1J_1(x)\,dx \\ &= -J_1(x) + \int x^{-1}x^1J_0(x)\,dx \\ &= -J_1(x) + \int J_0(x)\,dx.\end{aligned}$$

Alternativt kan det gjøres slik: Formelen er ekvivalent med at (ved derivasjon)

$$x^{-1}J_1(x) = -J_1'(x) + J_0(x). \tag{1}$$

Adderer vi formlene

$$\frac{2}{x}J_1(x) = J_0(x) + J_2(x)$$

og

$$2J_1'(x) = J_0(x) - J_2(x),$$

får vi nettopp (1).

Oppgave 2

a) Anta at $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Da er $y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ og $y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$. Innsatt i ligningen får vi når $p = 0$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(n(n-1)a_n + na_n + a_{n-2}\right)x^n + a_1x = 0,$$

som gir

$$a_1 = 0, \quad a_n = -\frac{1}{n^2}a_{n-2},\ n = 2, 3, \ldots.$$

Siden $a_1 = 0$ blir $a_{2n-1} = 0$ for alle n. Rekursjonsrelasjonen kan skrives for like indekser

$$a_{2n} = -\frac{1}{(2n)^2}a_{2n-2},\ n \in \mathbb{N}.$$

Rekursivt fås (bevises ved induksjon)

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n}{2^n \, n!^2} a_0.$$

Velg $a_0 = 1$.

b) Vi har

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx} e^{\frac{1}{2}x(t-t^{-1})} &= \frac{1}{2}(t - t^{-1}) e^{\frac{1}{2}x(t-t^{-1})} \\
&= \frac{1}{2}(t - t^{-1}) \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^{n-1} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n-1}(x) t^n - \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_{n+1}(x) t^n \\
&= \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \right) t^n
\end{aligned}$$

Venstresiden er lik $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)' t^n$. Dermed får

$$J_n(x)' = \frac{1}{2} \left(J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) \right).$$

c) Den stasjonære Schrödingerlikning der potensialet er null,

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \nabla^2 \psi(\vec{r}) = E \psi(\vec{r}),$$

tar følgende form i sylinderkoordinater:

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi(\vec{r}) = E\, \psi(\vec{r}).$$

Ved innsetting av

$$\psi = R(r) e^{im\varphi} \sin(k\pi z/L)$$

får vi

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} - \frac{k^2\pi^2}{L^2} \right) R(r) = E\, R(r),$$

idet $e^{im\varphi}$ og $\sin(k\pi z/L)$ er felles faktorer i alle ledd. Ved å slå konstantleddene sammen, med $E - \frac{\hbar^2\pi^2k^2}{2ML^2} = E_s$, fås

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\right) R(r) = E_s\, R(r),$$

som skulle vises.

Da φ og $\varphi+2\pi$ er samme sted i rommet, må bølgefunksjonen være uendret når 2π adderes til φ. Det krever $e^{2\pi mi} = 1$, som bare er tilfelle dersom m er et heltall.

Da veggene er ugjennomtrengelige er $\psi = 0$ utenfor sylinderen. Kontinuitet av bølgefunksjonen krever da at $\psi = 0$ på overflata, bl.a. for endeflatene i $z = 0$ og i $z = L$. Sinusfunksjonen er alltid null ved $z = 0$, og ved $z = L$ lik $\sin(k\pi)$, som forsvinner hvis og bare hvis k er heltallig. Vi tar $k = 1, 2, 3, \ldots$, fordi negative heltall vil ikke gi nye egenfunksjoner, og $k = 0$ ville gi $\psi = 0$.

d) Ved å innføre $r = \rho\hbar/\sqrt{2ME_s}$ fås umiddelbart

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho} - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R = R,$$

som etter multiplikasjon med ρ^2 tar formen

$$\rho^2\frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho\frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 - m^2)R = 0.$$

Dette er differensiallikningen for Bessel-funksjoner, som gitt i punkt a). I det fysiske problemet trenger vi den ikke-singulære løsningen, Bessel-funksjonen av første type. Altså $R \propto J_m(\rho)$, dvs

$$R(r) \propto \underline{\underline{J_m(r\sqrt{2ME_s/\hbar^2})}}.$$

e) Grensebetingelsen er, som nevnt under punkt c), at bølgefunksjonen er null ved overflata, dvs $R(r_0) = 0$. Argumentet for Bessel-funksjonen i punkt d) må altså være et av Bessel-funksjonens nullpunkter. I dette tilfellet var det oppgitt at $m = 0$ i grunntilstanden, så Besselfunksjonen er J_0. Det laveste nullpunktet gir laveste energi, så vi har bruk for det laveste nullpunktet x_1 for $J_0(x)$, oppgitt til $x_1 = 2.4048$. Altså

$$r_0\sqrt{2ME_s/\hbar^2} = x_1,$$

dvs

$$E_s = \frac{\hbar^2 x_1^2}{2Mr_0^2}.$$

Grunntilstanden, laveste energiegenverdien for

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2k^2}{2ML^2} + E_s,$$

tilsvarer denne verdien for E_s og laveste verdi for k, dvs $k = 1$:

$$E = \frac{\hbar^2\pi^2}{2ML^2} + E_s = \frac{\hbar^2}{2ML^2}\left[\pi^2 + x_1^2\frac{L^2}{r_0^2}\right].$$

Her er hakeparentesen den dimensjonsløse størrelsen ξ. Ved innsetting av $L = 3r_0$ får vi

$$\xi = \pi^2 + x_1^2\frac{L^2}{r_0^2} = \pi^2 + 9x_1^2 = \underline{\underline{61.92}}.$$

Oppgave 3

a) La f være en egenfunksjon, dvs $L(f) = \lambda f$. Da får

$$\langle f, L(f)\rangle = \langle f, \lambda f\rangle = \lambda||f||^2 > 0$$

siden $\langle f, f\rangle = ||f||^2 > 0$.

b) Siden rekkevidden er lik H, vet vi at det for hver $f \in H$ fins minst en g slik at $L(g) = f$. Anta det fins minst to, dvs

$$L(g_1) = L(g_2) = f,$$

dvs at $L(g_1 - g_2) = 0$. Videre

$$\langle g_1 - g_2, L(g_1 - g_2)\rangle = \langle g_1 - g_2, 0\rangle = 0.$$

Positiviteten gir at $g_1 = g_2$, altså g er entydig.

Oppgave 4

a) Det er mange måter å beregne disse Hermite-polynomene på. At $H_0 = 1$ følger umiddelbart av Rodrigues formel med $n = 0$. Så kan en f.eks. bruke den oppgitte rekursjonsformel $H_{n+1} = 2xH_n - 2nH_{n-1}$ til å beregne $H_1 = 2xH_0 = 2x$ og $H_2 = 2xH_1 - 2H_0 = 2x \cdot 2x - 2 \cdot 1 = 4x^2 - 2$, som vi skulle vise.

b) Energiegenfunksjonene $\psi_n(x)$ danner et fullstendig sett, slik at vi kan utvikle bølgefunksjonen $\Psi(x, 0)$ i disse:

$$\Psi(x, 0) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\psi_m(x).$$

Utviklingskoeffisienten c_n finnes ved å ta skalarproduktet med $\psi_n(x)$ på begge sider av likningen, og benytte at egenfunksjonene danner et ortonormert sett:

$$c_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\Psi(x,0)\; dx.$$

Å bestemme sannsynligheten for å finne partikkelens energi lik verdien $E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega$ er det samme som å bestemme sannsynligheten for å finne systemet i egentilstand nr. n, lik $p_n = |c_n|^2$, slik at

$$p_n = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\Psi(x,0)\; dx \right|^2 .$$

Da $\Psi(x,0)$ er en ulike funksjon av x, mens $\psi_0(x)$ og $\psi_2(x)$ er like funksjoner av x, vil integralet bli null for $n = 0$ og $n = 2$:

$$p_0 = p_2 = \underline{\underline{0}}.$$

For å beregne p_1 trenger vi

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1^*(x)\Psi(x,0)\, dx = \pi^{-\frac{1}{4}} 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{32}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{3}{2}x^2}\; dx \\ &= 2^{\frac{1}{2}} \left(\frac{32}{\pi^2}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2}\; dy. \end{aligned}$$

Integralet er oppgitt til $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$, som innsatt gir

$$c_1 = 2^{9/4}\, 3^{-3/2},$$

og dermed

$$p_1 = |c_1|^2 = \underline{\underline{\frac{16\sqrt{2}}{27}}} = \underline{\underline{0.838}}.$$