Løsningsforslag
Eksamen 25.05.99 i SIF4018 Matematisk fysikk

Oppgave 1

Sett

$$xH_n = \frac{1}{2}(H_{n+1} + 2nH_{n-1})$$

inn i integralet og bruk at Hermite-polynomene er ortogonale. Det gir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} xH_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}}(H_{n+1}(x) + 2nH_{n-1}(x))H_m(x)e^{-x^2}\,dx \\
&= \frac{1}{2}\langle H_{n+1}, H_m\rangle + n\langle H_{n-1}, H_m\rangle \\
&= \sqrt{\pi}\,2^m\,m!\begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } m = n+1, \\ m+1 & \text{for } m = n-1, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}
\end{aligned}$$

Oppgave 2

a) En operator $\widehat{F}$ er hermitesk hvis

$$\langle \Psi_1, \widehat{F}\Psi_2\rangle = \langle \widehat{F}\Psi_1, \Psi_2\rangle \tag{1}$$

for normerbare bølgefunksjoner Ψ_i. La oss kontrollere de to operatorene der $\widehat{p}_x = (\hbar/i)\partial/\partial x$. Ved delvise integrasjoner der overflateleddene i $x = \pm\infty$ må være null for kvadratisk integrerbare funksjoner får vi for $\widehat{F} = \widehat{p}_x^2$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^*\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\Psi_2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_2\left[-\hbar^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right]\Psi_1^*\,dx.$$

Så $\widehat{p}_x^2$ er hermitesk.

For $\widehat{F} = x\widehat{p}_x$ har vi, igjen ved delvis integrasjon,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1^* x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi_2\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_2\left[-x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\hbar}{i}\right]\Psi_1^*\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_2\left[x\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}\Psi_1 + \frac{\hbar}{i}\Psi_1\right]^*\,dx.$$

Tilstedeværelsen av det siste leddet, som ikke forsvinner for *vilkårlige* funksjoner Ψ_1 og Ψ_2, viser at $x\widehat{p}_x$ ikke er hermitesk.

Operatorer som svarer til fysiske størrelser må være hermiteske for da er egenverdiene reelle.

La Ψ_1 og Ψ_2 være to egenfunksjoner for $\widehat{F}$: $\widehat{F}\Psi_1 = f_1\Psi_1$ og $\widehat{F}\Psi_2 = f_2\Psi_2$. Egenverdiene er reelle. Innsetting i (1) gir

$$(f_2 - f_1)\langle\Psi_1, \Psi_2\rangle = 0.$$

Da forutsetningsvis $f_2 \neq f_1$ er skalarproduktet null, som skulle vises.

b) Da $\Psi' = (ib - x/\lambda^2)\Psi$ og $\int xe^{-x^2/\lambda^2}dx = 0$, får vi

$$\langle p_x\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x)\widehat{p}_x\Psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x)\frac{\hbar}{i}\frac{d}{dx}\Psi(x)\,dx = \hbar b\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x)\Psi(x)\,dx = \underline{\underline{\hbar b}}.$$

Oppgave 3

a) Fra definisjonen av J_p får vi

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{x}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^{2n+1}\,n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2})}\,x^{2n+1}.$$

Gamma-funksjonen i nevneren forenkles til

$$\Gamma(n+\frac{3}{2}) = (n+\frac{1}{2})(n-\frac{1}{2})\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\Gamma(\frac{1}{2}) = 2^{-(n+1)}(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1\cdot\Gamma(\frac{1}{2}).$$

Videre

$$2^{2n+1}\,n! = 2^{n+1}(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2.$$

Nevneren i $J_{1/2}$ kan dermed skrives

$$2^{2n+1}\,n!\,\Gamma(n+\frac{3}{2}) = (2n+1)!\,\Gamma(\frac{1}{2}),$$

og Taylor-rekken for sinus-funksjonen gjør at vi kan skrive

$$J_{1/2}(x) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})}\sqrt{\frac{2}{x}}\sin x.$$

Videre er $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ som gir det ønskede resultat.

b) Den stasjonære Schrödingerlikning der potensialet er null:

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\nabla^2\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}).$$

I kulekoordinater er iflg. vedlegget

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{\hbar^2 r^2}\widehat{\vec{L}^2}$$

Anvendt på $\psi = R(r)\,Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$, og bruk av at $\widehat{\vec{L}^2}\,Y_{lm} = l(l+1)\hbar^2\,Y_{lm}$, gir

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left[R'' + \frac{2}{r}R' - \frac{l(l+1)}{r^2}R\right] = ER,$$

som skulle bevises.

c) Ved å innføre en skalert radius ρ ved

$$r = \rho\sqrt{\frac{\hbar^2}{2ME}}, \tag{2}$$

får vi

$$\left[\frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{d}{d\rho} - \frac{l(l+1)}{\rho^2} + 1\right]R = 0. \tag{3}$$

Sett så

$$R = y\,\rho^{-\frac{1}{2}}, \tag{4}$$

og beregn

$$\frac{d}{d\rho}R = \frac{dy}{d\rho}\rho^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2}y\,\rho^{-\frac{3}{2}},$$

$$\frac{d^2}{d\rho^2}R = \frac{d^2y}{d\rho^2}\rho^{-\frac{1}{2}} - \frac{dy}{d\rho}\rho^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{4}y\,\rho^{-\frac{5}{2}}.$$

Innsetting i (3) og multiplikasjon med $\sqrt{\rho}$ gir

$$\frac{d^2y}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{dy}{d\rho} - \frac{l^2 + l + \frac{1}{4}}{\rho^2}y + y = 0.$$

Multiplikasjon med ρ^2 gir så

$$\rho^2 y'' + \rho y' + [\rho^2 - (l + \tfrac{1}{2})^2]y = 0,$$

som skulle vises.

Ved å sammenlikne med punkt a) ser vi at

$$y(\rho) \propto J_{l+\frac{1}{2}}(\rho).$$

Ved hjelp av (4) får vi så

$$R \propto \rho^{-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(\rho) \propto \underline{\underline{r^{-\frac{1}{2}} J_{l+\frac{1}{2}}(r\sqrt{2ME/\hbar^2})}}.$$

d) Med $l = 0$ kan vi benytte fra punkt a) at $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{2/\pi x}\sin x$. Det gir

$$R(r) \propto r^{-1}\sin(r\sqrt{2ME/\hbar^2}).$$

Da $\psi = 0$ for $r > r_0$ (ugjennomtrengelig vegg) og ψ er kontinuerlig, er $\psi(r_0) = 0$, dvs $R(r_0) = 0$. Dette er tilfelle om

$$r_0\sqrt{2ME/\hbar^2} = n\pi,$$

med n heltallig. Egenverdiene blir altså

$$E_n = \underline{\underline{\frac{\hbar^2\pi^2}{2Mr_0^2}n^2}}.$$

Vi kan ikke bruke $n = 0$ for da blir R identisk lik null, og negative n gir ikke nye egenfunksjoner. Altså $n = 1, 2, \ldots$.

Oppgave 4

Anta $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Da er

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n \text{ og } y'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)n a_{n+1}x^{n-1}.$$

Innsatt i differensialligningen fås

$$\begin{aligned} 0 &= xy'' + (1-2x)y' + (x-1)y \\ &= a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)n a_{n+1} + (n+1)a_{n+1} - 2n a_n + a_{n-1} - a_n\Big)x^n \\ &= a_1 - a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)^2 a_{n+1} - (2n+1)a_n + a_{n-1}\Big)x^n. \end{aligned}$$

Anta nå at $a_k = 1/k!$ for $k = 0, \ldots, n$. Dette er opplagt riktig for $n = 0$. Da er

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)^2}\big((2n+1)a_n - a_{n-1}\big) \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\big((2n+1)\frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\big) \\ &= \frac{1}{n!(n+1)^2}\big((2n+1) - n\big) \\ &= \frac{1}{(n+1)!}. \end{aligned}$$

(Alternativt kan formelen vises ved direkte innsetting.)
Vi finner da at $y = \sum_{n=0}^{\infty} x^n/n! = e^x$.

Direkte innsetting i ligningen viser at $e^x \ln x$ tilfredsstiller ligningen. Dermed kan g velges som en konstant multiplisert med e^x.

Oppgave 5

Vi tenker oss bølgefunksjonen utviklet i Coulombegenfunksjoner

$$\Psi(\vec{r}, 0) = \sum_{nml} c_{nml} \psi_{nml}(\vec{r}),$$

pluss eventuelle bidrag fra egenfunksjonene i det kontinuerlige spektret.

Sannsynligheten for å finne systemet i en av tilstandene med $n = 2$ er

$$p_2 = |c_{200}|^2 + |c_{210}|^2 + |c_{211}|^2 + |c_{21-1}|^2.$$

Vi beregner koeffisientene ved å ta skalarproduktet med den tilhørende egenfunksjonen og benytte at energiegenfunksjonene er ortonormerte:

$$c_{nlm} = \int \psi^*_{nml}(\vec{r}) \Psi(\vec{r}, 0)\, d^3 r.$$

Vi ser at bølgefunksjonen $\Psi(\vec{r}, 0)$ har samme vinkelavhengighet som ψ_{211}. Pga ortogonalitet av vinkelfunksjonene blir da

$$c_{200} = c_{210} = c_{21-1} = 0.$$

(Dette kan naturligvis også finnes ved eksplisitt beregning.) Det gjenstår å beregne

$$\begin{aligned} c_{211} &= \sqrt{\frac{1}{64\pi a_0^5}} \sqrt{\frac{1}{2\pi a_0^5}} \cdot \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin^3 \vartheta \, d\vartheta \cdot \int_0^{\infty} r^4 e^{-3r/2a_0}\, dr \\ &= \frac{1}{\pi a_0^5 \sqrt{128}} \cdot 2\pi \cdot \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{2a_0}{3}\right)^5 4! = \left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Det gir den søkte sannsynlighet

$$p_2 = |c_{211}|^2 = \underline{\underline{\left(\frac{8}{9}\right)^5}}.$$