NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk og Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:

Professor Per Hemmer, tel. 73 59 36 48
Professor Helge Holden, tel. 73 59 35 14

EKSAMEN I SIF4018 MATEMATISK FYSIKK

Mandag 7. august 2000
kl. 09.00 – 15.00

Tillatte hjelpemidler: Godkjent kalkulator
Rottmann: Matematisk formelsamling

Ett ark med uttrykk og formler er vedlagt.

Sensuren faller 3. september 2000.

Oppgave 1

Den generaliserte Laguerre-operatoren er gitt ved

$$L_\alpha(f) = -xf'' - (\alpha + 1 - x)f'.$$

$L_n^{(\alpha)}$, som betegner det $n$te generaliserte Laguerre-polynom, er egenfunksjon for L_α med egenverdi n, dvs

$$L_\alpha(L_n^{(\alpha)}) = nL_n^{(\alpha)}.$$

a) Sett $\alpha = 0$. Vis at

$$L_n^{(0)}(0) = 1.$$

b) Bruk differensialligningen til å vise at

$$(L_n^{(0)})'(0) = -n.$$

Oppgave 2

Tilstanden til en partikkel med masse m er beskrevet ved den normerte bølgefunksjonen

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sqrt{12\alpha}\ \left(e^{-\alpha x} - e^{-2\alpha x}\right) & x \geq 0, \end{cases}$$

der α er en konstant.

a) Hva er den midlere posisjon $\langle x \rangle$ (forventningsverdien for posisjonen) for partikkelen i denne tilstanden?

b) Finn også forventningsverdien (middelverdien) av impulsen p_x i tilstanden.

Oppgave 3

a) Hermitepolynomet H_n er et polynom av $n$te grad som tilfredsstiller

$$y'' - 2xy' + 2ny = 0, \qquad\qquad n \in \mathbb{N}_0.$$

Normeringen er slik at koeffisienten for polynomets høyeste potens er 2^n.

Bruk Rodrigues formel til å vise at

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2\, e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\ 2^n\, n!$$

b) La P være et polynom av grad n. Vis at da kan vi skrive

$$P = \sum_{k=0}^{n} c_k H_k$$

med

$$c_k = \frac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} P(x) H_k(x)\, dx.$$

c) Vis at

$$\frac{d^m}{dx^m} H_n = \frac{2^m n!}{(n-m)!} H_{n-m}$$

når $n \geq m$.

d) En partikkel med masse m befinner seg i det éndimensjonale potensialet

$$V(q) = \tfrac{1}{2} m\omega^2 q^2, \tag{1}$$

der q er stedskoordinaten og ω en konstant.

Skriv opp den stasjonære (tidsuavhengige) Schrödingerlikningen for partikkelens bølgefunksjon ψ. Vis at når dimensjonsløs koordinat x og dimensjonsløs energi ϵ innføres ved

$$q = x\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \qquad \text{og} \qquad E = \tfrac{1}{2}\hbar\omega\,\epsilon$$

tar Schrödingerlikningen formen

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(\epsilon - x^2\right)\,\psi = 0. \tag{2}$$

e) Vis at

$$\psi_n = H_n(x)\, e^{-\frac{1}{2}x^2}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

er løsninger av den dimensjonsløse Schrödinger-likningen (2), og beregn de tilhørende dimensjonsløse energiegenverdier ϵ_n. Hva kan du si (uten bevis eller begrunnelse) om andre løsninger av (2) enn disse?

f) Partikkelen er nå i en ikke-stasjonær tilstand i harmonisk-oscillator-potensialet (1). Ved tida $t = 0$ er partikkelens bølgefunksjon

$$\Psi(q, 0) = N \cdot x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

der $N = (16m\omega/9\pi\hbar)^{\frac{1}{4}}$ er normeringskonstanten, og $q = x\sqrt{\hbar/m\omega}$. Hvilke resultater kan måling av partikkelens energi gi i dette tilfellet, og hva er sannsynlighetene for de ulike måleresultatene?

Oppgave 4

Bessel-funksjonen av første type er gitt ved

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p}$$

for $p \in [0, \infty)$. Definer

$$J_{-p}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-p}$$

for $p \in [0, \infty)$.

a) Bruk at $1/\Gamma(-k) = 0$ for $k \in \mathbb{N}_0$ (skal ikke vises) til å vise at

$$J_{-m} = (-1)^m J_m$$

dersom $m \in \mathbb{N}_0$.

b) Vis at J_p og J_{-p} er lineært uavhengige dersom $p \in [0, \infty)$ ikke er heltallig.

Oppgave 5

Et elektron med masse m som beveger seg i et kulesymmetrisk potensial $V(r)$ er i en tilstand beskrevet ved en bølgefunksjon

$$\psi(\vec{r}) = C\, r\, e^{-r/2a_0}\, \cos\vartheta. \tag{3}$$

Her er kulekoordinatene definert ved at $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$, $y = r\sin\vartheta\sin\varphi$, $z = r\cos\vartheta$, og C er en normeringskonstant (som ikke skal bestemmes).

a) Vis at z-komponenten og kvadratet av dreieimpulsen, L_z og $\vec{L}^2$, har skarpt bestemte verdier i denne tilstanden ψ. Hva er disse verdiene?

b) La $P(r)\, dr$ være sannsynligheten for å finne elektronet med en avstand fra origo i intervallet $(r, r+dr)$, dvs i et kuleskall med radius r og tykkelse dr. Når elektronet er i tilstanden beskrevet ved (3), ved hvilken avstand r_m er sannsynlighetstettheten $P(r)$ maksimal?

Oppgave 6

Anta at $f_n \to f$ når $n \to \infty$ i et Hilbert-rom H. Vis at da vil $\|f_n\| \to \|f\|$ når $n \to \infty$.

Formler og uttrykk

Noe av dette kan du få bruk for.

Hermite-polynomer

$$\begin{aligned}
&\text{Differensiallikning:} & H_n'' - 2xH_n' + 2nH_n &= 0 \\
&\text{Rodrigues formel:} & H_n(x) &= e^{x^2}\left(-\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2} \\
&\text{Norm og ortogonalitet:} & \int_{-\infty}^{\infty} H_n(x)H_m(x)e^{-x^2}\,dx &= \sqrt{\pi}\,2^n\,n!\,\delta_{nm} \\
&\text{Derivert:} & H_n' &= 2nH_{n-1} \\
&\text{Genererende funksjon:} & \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\,\frac{s^n}{n!} &= e^{-s^2+2xs}
\end{aligned}$$

NB: Rottmann bruker en annen konvensjon for Hermite-polynomer.

Generaliserte Laguerre-polynomer

$$\text{Rodrigues formel:} \quad L_n^{(\alpha)}(x) = \frac{x^{-\alpha}e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^{n+\alpha}e^{-x}\right).$$

Harmonisk oscillator

Bølgefunksjoner for partikkel med masse m i potensialet $V(q) = \frac{1}{2}m\omega^2 q^2$:

$$\begin{aligned}
\text{Grunntilstand:}\quad & \psi_0(q) = \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\; e^{-x^2/2} \\
\text{Første eksiterte tilstand:}\quad & \psi_1(q) = \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\,2x\; e^{-x^2/2} \\
\text{Andre eksiterte tilstand:}\quad & \psi_2(q) = \left(\tfrac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\; \tfrac{1}{\sqrt{8}}\,(4x^2-2)e^{-x^2/2}
\end{aligned}$$

Her er $x = q\sqrt{m\omega/\hbar}$.

Dreieimpulsoperatorer

I kulekoordinater med konvensjon $x = r\sin\vartheta\cos\varphi, y = r\sin\vartheta\sin\varphi, z = r\cos\vartheta$ er

$$\widehat{\vec{L}^2} = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right] \quad \text{og} \quad \widehat{L}_z = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}.$$

Egenverdier og egenfunksjoner:

$$\begin{aligned}
\widehat{\vec{L}^2}\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) &= \ell(\ell+1)\hbar^2\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) \\
\widehat{L}_z\,Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi) &= m\hbar\;Y_{\ell m}(\vartheta,\varphi)
\end{aligned}$$

Egenfunksjonene $Y_{\ell m}$ er normert slik at $\iint |Y_{\ell m}|^2\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi = 1$.

Integraler

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2\,e^{-cx^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{c^3}}; \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4\,e^{-cx^2}\,dx = \frac{3}{4}\sqrt{\frac{\pi}{c^5}} \qquad (c>0).$$

$$\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,dt = \Gamma(x) \qquad \Gamma(n+1) = n! \text{ for ikke-negative heltall } n.$$