Løsningsforslag

Kontinuasjonseksamen 2000
SIF4018 Matematisk fysikk

Oppgave 1

a) Rodrigues formel gir at

$$L_n^{(0)}(x) = \frac{e^x}{n!}\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)$$

Vi har at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left(x^n e^{-x}\right) &= nx^{n-1}e^{-x} - x^n e^{-x}, \\ \frac{d^2}{dx^2}\left(x^n e^{-x}\right) &= n(n-1)x^{n-2}e^{-x} - 2nx^{n-1}e^{-x} + x^n e^{-x}. \end{aligned}$$

For å beregne $L_n^{(0)}(0)$ må vi sette inn $x = 0$ i de deriverte ovenfor. Vi ser at alle ledd forsvinner unntatt det ene leddet der x^n er derivert n ganger. Derfor får vi

$$L_n^{(0)}(0) = \frac{e^0}{n!}\, n! x^0 = 1.$$

b) Differensialligningen gir at

$$-x(L_n^{(0)})'' - (1-x)(L_n^{(0)})' = nL_n^{(0)}.$$

Når vi setter inn $x = 0$ får vi at

$$(L_n^{(0)})'(0) = -n.$$

Oppgave 2

a) Sannsynlighetstettheten for posisjon er

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2 = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 12\alpha\left(e^{-2\alpha x} - 2e^{-3\alpha x} + e^{-4\alpha x}\right) & x \geq 0 \end{cases}$$

Middelposisjonen blir da

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x\, \rho(x)\, dx.$$

Vha integralet

$$\int_0^\infty x e^{-Ax}\, dx = \frac{1}{A^2}$$

får vi

$$\langle x \rangle = 12\alpha \left(\frac{1}{4\alpha^2} - \frac{2}{9\alpha^2} + \frac{1}{16\alpha^2} \right) = \underline{\underline{\frac{13}{12\alpha}}}.$$

b) Den kvantemekaniske operator som svarer til størrelsen p_x er

$$\widehat{p}_x = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}.$$

Forventningsverdien blir

$$\langle p_x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^* \widehat{p}_x \psi \; dx = \frac{\hbar}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \psi \psi' \; dx = \frac{\hbar}{2i} \left[\psi^2 \right]_{-\infty}^{\infty} = \underline{\underline{0}},$$

da $\psi(\pm\infty) = 0$. Alternativt kunne vi naturligvis ha regnet ut integralet leddvis.

Oppgave 3

a) Vi har ved gjentatt bruk at delvis integrasjon

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} \; dx = (-1)^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right)^2 e^{x^2} \; dx$$
$$= (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{d^n}{dx^n} \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) e^{x^2} \right) e^{x^2} \; dx.$$

Leddet

$$\left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right) e^{x^2}$$

er et polynom av grad n. Ved n gangers derivasjon forsvinner alle leddene unntatt det leddet som fremkommer ved å derivere e^{-x^2} n ganger, dvs $(-2x)^n n! = (-1)^2 2^n n! x^0 = (-1)^2 2^n n!$. Dermed

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} \; dx = 2^n n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \; dx = 2^n n! \sqrt{\pi}$$

(Alternativt kan man bruke at H_n står ortogonalt på alle polynomer av lavere grad. Dette gir

$$\int_{-\infty}^{\infty} [H_n(x)]^2 e^{-x^2} \; dx = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} x^n \left(\frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \right)^2 \; dx$$

og deretter delvis integrasjon.)

b) Hermite-polynomet H_k har grad k, og dermed danner samlingen av alle Hermite-polynomer av grad høyst n en basis for mengden av polynomer av grad høyst n (Lemma 7.7 i Holdens bok). Det gir

$$P = \sum_{k=0}^{n} c_k H_k$$

for konstanter c_k. Vi bruker at Hermite-polynomene er ortogonale i $L^2(\mathbb{R}; e^{-x^2})$ til å beregne c_k:

$$\langle H_k, P\rangle = c_k\langle H_k, H_k\rangle = c_k 2^k k!\sqrt{\pi}$$

der $\langle f, g\rangle = \int f(x)g(x)e^{-x^2}\,dx$, som var det vi skulle vise.
c) Resultatet følger ved gjentatt bruk av formelen $H_n' = 2nH_{n-1}$.
d) Når Hamiltonoperatoren er $\widehat{H} = \widehat{p}^2 + V(q)$ blir den tiduavhengige Schrödinger-likningen $\widehat{H}\psi = E\psi$

$$\frac{-\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dq^2}\psi + \frac{1}{2}m\omega^2 q^2\psi = E\psi.$$

Multiplikasjon av likningen med $2/\hbar\omega$ gir

$$\frac{\hbar}{m\omega}\frac{d^2}{dq^2}\psi - \frac{m\omega}{\hbar}q^2\psi + \epsilon\psi = 0.$$

Ved å innføre $x = q\sqrt{m\omega/\hbar}$ ser en straks at dette er

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi - x^2\psi + \epsilon\psi = 0, \tag{1}$$

som vi skulle vise.

e) For å vise at $\psi_n = H_n(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ er løsning av (1) deriverer vi to ganger mhp x:

$$\psi_n' = (H_n' - xH_n)\,e^{-\frac{1}{2}x^2} \qquad \text{og} \qquad \psi_n'' = \left(H_n'' - 2xH_n' - H_n + x^2H_n\right)e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

Fra punkt a) har vi at $H_n'' - 2xH_n' = -2nH_n$, som gir

$$\psi_n'' = \left(-2n - 1 + x^2\right)H_n e^{-\frac{1}{2}x^2} = \left(-2n - 1 + x^2\right)\psi_n.$$

Innsetting i den dimensjonsløse Schrödinger-likningen (1) gir så

$$(-2n - 1 + \epsilon)\psi_n = 0.$$

Vi får altså at ψ_n tilfredsstiller (1) hvis og bare hvis egenverdiparameteren ϵ har verdien $\underline{\underline{\epsilon_n = 2n+1}}$. Det tilsvarer at energiegenverdien er

$$E_n = \tfrac{1}{2}\hbar\omega\,\epsilon_n = (n+\tfrac{1}{2})\hbar\omega.$$

Andre løsninger av Schrödingerlikningen divergerer for $x \to \pm\infty$, slik at bølgefunksjonen blir ikke kvadratisk integrerbar.

f) Den oppgitte bølgefunksjon $\Psi(q,0)$ er ikke en av energiegenfunksjonene (siden x^2 ikke er et Hermite-polynom), men er en overlagring av slike. I vedlegget er oppgitt at

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\; e^{-\frac{1}{2}x^2}\\ \psi_2 &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\;\frac{1}{\sqrt{8}}(4x^2-2)\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\end{aligned}$$

Vi ser at en lineærkombinasjon av disse kan gi Ψ, idet

$$\psi_2 + \frac{2}{\sqrt{8}}\,\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{4}{\sqrt{8}}\,x^2\,e^{-\frac{1}{2}x^2} = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\Psi(q,0).$$

Altså er

$$\Psi(q,0) = \sqrt{\tfrac{2}{3}}\left(\psi_2 + \frac{2}{\sqrt{8}}\psi_0\right) = \sqrt{\tfrac{1}{3}}\,\psi_0 + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\,\psi_2. \tag{2}$$

Etter et av kvantemekanikkens grunnpostulater er måleresultatet for energien en av energiegenverdiene E_n, gitt i punkt e). Sannsynligheten for at resultatet er E_n er lik $p_n = |c_n|^2$, der settet av c_n er koeffisientene i utviklingen av bølgefunksjonen i energiegenfunksjoner,

$$\Psi(q,0) = \sum_n c_n\;\psi_n(q).$$

Vi ser av (2) at utviklingen i dette tilfellet har bare to ikke-forsvinnende ledd. Måleresultatet må derfor være enten $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$, med sannsynlighet $p_0 = |c_0|^2 = \frac{1}{3}$, eller $E_2 = \frac{5}{2}\hbar\omega$, med sannsynlighet $p_2 = |c_2|^2 = \frac{2}{3}$.

Kommentar: Koeffisientene c_0 og c_2 kunne alternativt finnes ved å ta skalarproduktet mellom bølgefunksjonen og energiegenfunksjonene:

$$c_n = \int \psi_n^*(q)\Psi(q,0)\;dx.$$

Oppgave 4

a) Anta $m \in \mathbb{N}_0$. Da får vi

$$J_{-m}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}$$
$$= \sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n-m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n-m}$$

siden $1/\Gamma(n-m+1) = 0$ for $n = 0, \ldots, m-1$. Innfør ny variabel ved $k = n - m$. Det gir

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+m}}{(k+m)!\,\Gamma(k+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2(k+m)-m}$$
$$= (-1)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+m}$$
$$= (-1)^m J_m(x)$$

siden

$$(k+m)!\,\Gamma(k+1) = k!\,\Gamma(k+m+1)$$

(bruk at $\Gamma(\ell+1) = \ell!$).

b) Vi ser at $J_{\pm p}(x)$ nær $x = 0$ oppfører seg som

$$J_p(x) \approx \frac{1}{\Gamma(p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^p$$

og

$$J_{-p}(x) \approx \frac{1}{\Gamma(-p+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-p}$$

Lineær uavhengighet krever at det fins konstanter c_1 og c_2 slik at

$$c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) = 0$$

for alle x. Nær $x = 0$ får vi

$$c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \approx c_1 \frac{1}{2^p \Gamma(p+1)} x^p + c_2 \frac{2^p}{\Gamma(-p+1)} x^{-p}.$$

Siden det første leddet går mot null og det andre leddet går mot uendelig når $x \to 0$, kan denne ligningen kun oppfylles når $c_1 = c_2 = 0$.

Oppgave 5

a) En fysisk størrelse F har en skarpt bestemt verdi i en systemtilstand ψ hvis og bare hvis ψ er en egentilstand for den tilsvarende kvantemekaniske operator $\widehat{F}$. Verdien av størrelsen i denne tilstanden er lik egenverdien for $\widehat{F}$.

Operatorene for L_z og $\vec{L}^2$ var oppgitt i vedlegget. Vi opererer med disse på tilstanden ψ.
(i)

$$\widehat{L}_z\psi = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial\varphi}\psi = 0,$$

fordi ψ ikke inneholder variabelen φ. Altså er den oppgitte ψ egenfunksjon for $\widehat{L}_z$ med egenverdi null.

(ii)

$$\widehat{\vec{L}}^2\ \psi = -\hbar^2\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right]\psi,$$

igjen fordi ψ ikke inneholder φ. Derivasjonene berører bare den variable ϑ, så vi må beregne

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} + \cot\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\right]\cos\vartheta = -\cos\vartheta + \cot\vartheta(-\sin\vartheta) = -2\cos\vartheta.$$

Altså er

$$\widehat{\vec{L}^2}\psi = 2\hbar^2\ \psi.$$

Dvs at tilstanden er en egentilstand for $\widehat{\vec{L}^2}$, med egenverdi $2\hbar^2$.

Konklusjonen er altså at i denne tilstanden har L_z verdien $\underline{\underline{0}}$, og $\vec{L}^2$ verdien $\underline{\underline{2\hbar^2}}$.

b) Sannsynligheten for å finne partikkelen i volumelementet d^3r er $|\psi|^2\ d^3r$. I kulekoordinater er $d^3r = r^2\,dr\ \ \sin\vartheta\,d\vartheta\ d\varphi$. Den søkte radielle sannsynligheten finner vi ved å integrere sannsynlighetstettheten over vinklene:

$$P(r)\,dr = r^2\,dr\int_{\vartheta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{2\pi}|\psi|^2\ \sin\vartheta\ d\varphi.$$

Da bølgefunksjonen er på produktform gir vinkelintegrasjonene en r-uavhengig konstant, og dermed får vi

$$P(r) = \text{konstant}\ \ r^4 e^{-r/a_0}.$$

For å finne ved hvilken avstand $P(r)$ er maksimal, nullstiller vi den deriverte:

$$P'(r) = \text{konstant } (4r^3 - r^4 a_0^{-1})e^{-r/a_0} = 0.$$

Nullpunkter i $r = 0$ (der $P(r) = 0$) og i $r = 4r_0$ (der $P(r)$ har maksimum). Altså

$$r_m = \underline{\underline{4a_0}}.$$

Oppgave 6

Trekantulikheten gir

$$|\|f_n\| - \|f\|| \leq \|f_n - f\|.$$

Siden $f_n \to f$ når $n \to \infty$, vil

$$\|f_n - f\| \to 0.$$

Dermed

$$\|f_n\| \to \|f\|.$$